

**stichting
mathematisch
centrum**



AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

TN 95/80

AUGUSTUS

R. DE BRUIN

SUBHARMONISCHE OPLOSSINGEN VAN PERIODIEK AANGEDREVEN STELSLS
DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN MET TOEPASSINGEN
IN DE POPULATIEDYNAMICA

kruislaan 413 1098 SJ amsterdam



Printed at the Mathematical Centre, 413 Kruislaan, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O.).

Subharmonische oplossingen van periodiek aangedreven stelsels differentiaalvergelijkingen met toepassingen in de populatiedynamica

door

R. de Bruin

N

SAMENVATTING

Dit rapport handelt over een numerieke methode tot het vinden van subharmonische oplossingen van stelsels differentiaalvergelijkingen met een periodieke aandrijffterm. Hierbij maken we gebruik van een numerieke benadering van de Poincaré-afbeelding. Existentie en stabiliteit van de oplossingen kunnen met de methode van Urabe bewezen worden. Vervolgens wordt een uitgebreide numerieke analyse gegeven voor de aangedreven Volterra-Verhulstvergelijking. Dit systeem wordt in de ecologie angewend als model voor de rover-prooi relatie tussen twee diersoorten. Subharmonische oplossingen komen overeen met meerjaarlijkse cycli in de dichtheden van de soorten en kunnen volgens deze studie het gevolg zijn van de seizoensinvloeden.

TREFWOORDEN: Aangedreven Volterra-Verhulstvergelijkingen, subharmonische oplossing, numerieke integratie, stelsels differentiaalvergelijkingen, Poincaré-afbeelding, differentieschema, methode van Urabe

Mijn erkentelijkheid gaat uit naar Johan Grasman die het onderwerp van deze scriptie suggereerde en mij tijdens dit onderzoek, door een groot aantal adviezen, voortdurend een stimulans is gebleven. Verder dank ik Jan Verwer die de methode van Urabe aanbeval en deze tezamen met Joke Blom op enkele hier gebruikte voorbeelden toepaste. Joke dank ik voorts voor haar tips aangaande het programmeren.

0. INDEX

1. INLEIDING

- 1.1. Stelsels differentiaalvergelijkingen als model in de populatiedynamica
- 1.2. Subharmonische oplossingen van stelsels differentiaalvergelijkingen
- 1.3. De aangedreven Volterra-Verhulstvergelijking

2. KWALITATIEVE ANALYSE VAN NIET-LINEAIRE DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

- 2.1. Existentie en eenduidigheid van het beginwaardeprobleem
- 2.2. Afhankelijkheid van de beginwaarde
- 2.3. De Poincare-afbeelding en Brouwer's dekpuntstelling
- 2.4. Stabiliteit van de periodieke oplossing

3. NUMERIEKE INTEGRATIE VAN HET BEGINWAARDEPROBLEEM

- 3.1. Enkele differentieschema's
- 3.2. Consistentie en convergentie van differentieschema's
- 3.3. Stabiliteit van het numerieke integratieproces

4. PERIODIEKE OPLOSSINGEN MET GEGEVEN PERIODE

- 4.1. Benadering dekpunten van de Poincaré-afbeelding
- 4.2. Existentie van geïsoleerde periodieke oplossing

5. DE AANGEDREVEN VOLTERRA-VERHULSTVERGELIJKING

- 5.1. Toepassing van de methode van Urabe
- 5.2. Numerieke resultaten
- 5.3. Periodieke verschijnselen in de populatiedynamica

6. LITERATUURLIJST

APPENDIX

De Fouriercoëfficiënten van enkele stabiele oplossingen

1. INLEIDING

1.1. Stelsels differentiaalvergelijkingen als model in de populatiedynamica

Een complete beschrijving van een ecosysteem kan door de grote aantallen plant- en diersoorten, en het ingewikkelde interactiepatroon, bijzonder complex zijn. Het wiskundig onderzoek van dergelijke systemen baseert zich veelal op een simulatiemodel, waarin de parameters min of meer intuïtief geschikt gekozen worden. Om tot een meer gefundeerde mathematische analyse te komen moeten we ons beperken tot een systeem met slechts enkele soorten. In deze scriptie, die samengevat is in een rapport van BLOM, DE BRUIN, GRASMAN en VERWER [1], zullen we ons toeleggen op een wiskundig model dat de interactie tussen twee soorten beschrijft die in een rover-prooirelatie leven. Het model heeft dan de vorm van twee gekoppelde differentiaalvergelijkingen. We kunnen een dergelijk systeem opstellen onder een aantal aanname. We veronderstellen dat de populaties voldoende groot zijn en dat de kans op uitsterven van één der soorten op basis van een gering aantal te verwaarlozen is. Het aantal exemplaren van één soort kan op deze gronden als een continue variabele gekozen worden en de veranderingen in de populatiedichtheden mag men deterministisch bepaald veronderstellen. Een andere aanname is dat de toekomst geheel uit de toestand van het heden kan worden bepaald: het systeem heeft dus geen geheugen. Wel laten we toe dat externe factoren een tijdsafhankelijke invloed kunnen uitoefenen op het systeem. Onder deze voorwaarden laat een rover-prooisysteem zich beschrijven door een stelsel differentiaalvergelijkingen van het type

$$(1.1a) \quad \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, t)$$

$$(1.1b) \quad \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, t)$$

waarin x_1 en x_2 respectievelijk het aantal prooidieren en het aantal roofdieren voorstellen. Over het algemeen stelt (1.1) een niet-autonoom systeem voor. De analyse van een dergelijk systeem heeft naast een aantal kwalitatieve aspecten, zoals de vraag naar het bestaan van periodieke oplossingen van (1.1) met een rechterlid dat periodiek is in de tijd, ook kwantitatieve

elementen zoals de constructie van een benadering van een dergelijke periodieke oplossing. Om deze vragen te kunnen beantwoorden maken we een nadere studie van de existentie en de numerieke benadering van oplossingen voor beginwaardeproblemen van het type

$$(1.2) \quad \frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

$$x(0) = x_0.$$

Hierin is x gegeneraliseerd tot een n -dimensionale vector, zodat de resultaten hiervan ook tot meer-dimensionale systemen van interacterende populaties uitgebreid kan worden.

1.2. Subharmonische oplossingen van stelsels differentiaalvergelijkingen

Van systemen van het type (1.2) waarvan het rechterlid periodiek in t is, vindt men in de literatuur vele beschouwingen over het bestaan van periodieke oplossingen met dezelfde periode.

Minder bekend is dat zulke systemen stabiele subharmonische oplossingen kunnen bevatten met een periode die een veelvoud is van die van de aandrijfterm. In sommige gevallen is het zelfs mogelijk dat meerdere stabiele subharmonische oplossingen worden gevonden met verschillende perioden. Beschouwen we nu één of andere beginwaarde, dan zien we, wanneer we het systeem numeriek integreren, dat de oplossing na langere tijd een stabiele oscillerende toestand nadert. Kiezen we echter een andere beginwaarde dan zal de oplossing wellicht naar een andere stabiel oscillerende toestand naderen. Om deze willekeur uit te bannen en om tevens meer subharmonische oplossingen tegelijkertijd te kunnen opsporen zullen we het probleem wat systematischer aanpakken en over een voldoende grote verzameling beginwaarden in het fasevlak integreren. Numerieke integratie voor elke beginwaarde over een groot tijdsinterval is uitgesloten en, zoals we zullen zien, ook niet nodig. Integratie over de periode van de aandrijfterm voegt aan iedere beginwaarde één punt toe. Deze afbeelding, die we de Poincaré-afbeelding noemen, wordt in hoofdstuk 2 behandeld. We construeren daar een benadering van de bovengenoemde afbeelding door een numeriek differentieschema op te stellen waardoor we op een efficiënte wijze verschillende subharmonische

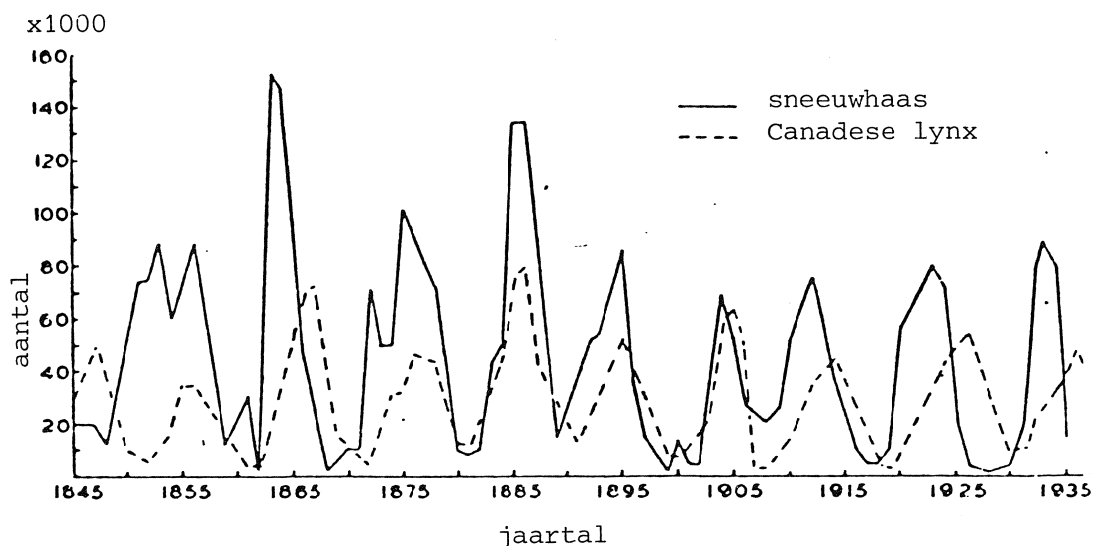
approximaties kunnen vinden. Hoofdstuk 3 gaat nader in op de numerieke aspecten.

In hoofdstuk 4 wordt de existentie van een periodieke oplossing in een omgeving van een benaderde oplossing onderzocht met behulp van de methode van URABE [20]. Deze methode stelt ons in staat te bewijzen dat in een omgeving van een periodieke functie die een oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen voldoende dicht benadert een geïsoleerde periodieke oplossing bestaat. Voorts levert de methode een maximum aan de fout van de benadering en een uitspraak over eventuele stabiliteit van de periodieke oplossing.

In hoofdstuk 5 passen we bovenstaande theorie toe op een biologisch relevant model, dat we in de volgende paragraaf nader zullen uitwerken.

1.3. De aangedreven Volterra-Verhulstvergelijking

In de ecologie kennen we vele voorbeelden van populaties in een rover-prooi relatie waarvoor de dichtheden met een min of meer vaste periode fluctueren. Een klassiek voorbeeld hiervan is dat van de sneeuwhaas en de Canadese lynx met een periodieke toe- en afname van ongeveer tien jaar (zie figuur 5.1)



figuur 1.1. Periodieke fluctuaties in dichtheden van de Canadese lynx en de sneeuwhaas

Voor de analyse van deze fluctuaties in de populatiedichtheden maken we gebruik van mathematische modellen zoals stelsels differentiaalvergelijkingen die de wisselwerking tussen de populaties beschrijven. De Volterra-Lotkavergelijking kennen we als een eenvoudig voorbeeld van een rover-prooi-systeem met periodieke oplossingen. Wanneer x het aantal prooidieren aanduidt en y het aantal roofdieren dan ziet de Volterra-Lotkavergelijking er als volgt uit

$$(1.3a) \quad \frac{dx}{dt} = ax - bxy$$

$$(1.3b) \quad \frac{dy}{dt} = -cy + dxy$$

waarin a, b, c en d de positieve parameters van het systeem zijn. Vergelijking (1.3) heeft een één-parameterfamilie van periodieke oplossingen afhankelijk van de beginwaarden. Hier stuiten we op één van de tekortkomingen van dit model: de amplitude en de periode hangen van de beginwaarde af, wat uit biologisch oogpunt onnatuurlijk mag heten. Voorts zijn de oplossingen neutraal stabiel. Dat wil zeggen dat bij een kleine verstoring het systeem niet meer in de oude situatie terugkeert. Het is daarom duidelijk dat een dergelijk model niet de jaren achtereenvolgende waargenomen vaste perioden kan verklaren. Een derde bezwaar is dat het model structureel instabiel is. Voegen we namelijk aan (1.3a) een Verhulstterm (remmende faktor op de groei) toe dan gedraagt de oplossing zich kwalitatief anders voor $e \neq 0$

$$(1.4a) \quad \frac{dx}{dt} = ax - bxy - ex^2$$

$$(1.4b) \quad \frac{dy}{dt} = -cy + dxy.$$

Oplossingen van (1.4) waarin $e > 0$ dempen echter op den duur uit en zijn daardoor eveneens ongeschikt om de periodieke veranderingen in populatiedichtheden te verklaren. We zullen nu (1.4) beschouwen waarin één van de parameters periodiek is in de tijd. In hoofdstuk 5 bewijzen we het bestaan van asymptotisch stabiele oplossingen met een periode die een veelvoud is van de periode van de aandrijvende term. Een biologische motivatie voor het kiezen van periodiek variërende parameters kunnen we vinden in de

invloed van de seizoenen.

We veronderstellen nu dat de aanwas van de prooidieren periodiek is met periode 1. Daar we voornamelijk in het kwalitatieve gedrag geïnteresseerd zijn kiezen we

$$(1.5) \quad a = a_0 + a_1 \cos 2\pi t.$$

Het uiteindelijke systeem waarvoor we in hoofdstuk 5 hogere orde periodieke stabiele oplossingen zoeken met een redelijk attractiegebied (d.w.z. een redelijke kans op bestaan) wordt dan

$$(1.6a) \quad \frac{dx}{dt} = (a_0 + a_1 \cos 2\pi t)x - bxy - ex^2$$

$$(1.6b) \quad \frac{dy}{dt} = -cy + dxy$$

voor nader te kiezen waarden van de parameters.

2. KWALITATIEVE ANALYSE VAN NIET-LINEAIRE DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

2.1. Existentie en eenduidigheid van het beginwaardeprobleem

In deze paragraaf zullen we existentie- en eenduidigheidsstellingen voor het niet-lineaire beginwaardeprobleem formuleren. Deze stellingen met bijbehorende bewijzen zijn gebaseerd op het werk van CODDINGTON en LEVINSON [5]. Bij de uitwerking van de theorie gebruiken we de volgende definities.

DEFINITIE 2.1. De klasse van functies die k maal continu differentieerbaar zijn op het interval $I = (a, b)$ geven we aan met $C^k(K)$. Voor $k = 0$ geven we hiermee aan de klasse van continue functies en schrijven in dat geval ook wel $C(I)$.

DEFINITIE 2.2. De klasse van functies gedefinieerd op een open samenhangende verzameling D van $\mathbb{R}^3$, waarvan alle k -de orde partiële afgeleiden bestaan en continu zijn geven we aan met $C^k(D)$ (voor $k = 0$ is dit de klasse van continue functies $C(D)$).

In deze paragraaf zullen wij ingaan op de vraag of er voor gegeven functies $f_i(t, x_1, x_2) \in C(D)$, $i = 1, 2$ een éénmaal differentieerbare vectorfunctie $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$ gedefinieerd op I bestaat zodanig dat geldt

$$(2.1) \quad (t, \phi(t)) \in D \quad \text{voor} \quad t \in I,$$

$$(2.2) \quad \phi'(t) = f(t, \phi).$$

Anders geformuleerd komt dit neer op de vraag of het niet-lineaire stelsel differentiaal vergelijkingen

$$(2.3) \quad x' = f(t, x), \quad x = (x_1(t), x_2(t))$$

oplossingen heeft. Als $\phi(t)$ een oplossing van (2.3) op I is, dan volgt uit (2.2) dat $\phi_i(t) \in C'(I)$. Aan de hand van het volgende voorbeeld laten we zien dat er oneindig veel oplossingen in D kunnen liggen. Gegeven het stelsel

$$(2.4a) \quad x_1' = 1$$

$$(2.4b) \quad x_2' = 0$$

met als oplossingen

$$(2.5a) \quad \phi_1(t) = t + c_1,$$

$$(2.5b) \quad \phi_2(t) = c_2.$$

Het gebied $D = \{(t, x) \mid 0 < t < 1, 0 < x_i < 1, i = 1, 2\}$ bevat de oplossingen waarvoor $0 < c_i < 1$, $i = 1, 2$. Er is in dit voorbeeld slechts één oplossing die door een vast punt van D gaat. Bij existentie en eenduidigheid van oplossingen van (2.3) kijken we naar oplossingen die door een gegeven punt in D gaan (de beginwaarde). We beschouwen dus in het vervolg

$$(2.6) \quad x_i' = f_i(t, x_1, x_2) \quad \text{met} \quad x_i(\tau) = \xi_i, \quad i = 1, 2,$$

waarbij $(\tau, \xi_1, \xi_2) \in D$, of wel, vind een interval I ($\tau \in I$) en een vectorfunctie $\phi(t)$ met $\phi_i(t) \in C(I)$ die voldoet aan (2.6). Integratie van (2.6) levert het stelsel integraalvergelijkingen

$$(2.7) \quad \phi_i(t) = \xi_i + \int_{\tau}^t f_i(s, \phi_1(s), \phi_2(s)) ds, \quad i = 1, 2 \quad (t \in I).$$

Stel nu omgekeerd dat er een $\phi(t) \in C'(I)$ bestaat die aan het stelsel integraalvergelijkingen (2.7) voldoet dan geldt $\phi_i(\tau) = \xi_i$ voor $i = 1, 2$ en $\phi(t)$ is een oplossing van (2.3) op I . Dus het oplossen van het beginwaardeprobleem (2.3) door $(\tau, \xi_1, \xi_2) \in D$ op I is equivalent met het vinden van $\phi(t) \in C(I)$ die aan (2.7) voldoet.

DEFINITIE 2.3. Een ' ϵ -benaderende' oplossing van (2.3) noemen we een vectorfunctie $\phi(t)$ met $\phi(t) \in C(I)$ voor $i = 1, 2$ zodanig dat geldt:

- (i) $(t, \phi_1(t), \phi_2(t)) \in D$,
- (ii) $\phi_i(t) \in C'(I \setminus S_i)$, $i = 1, 2$ met S_i een eindige deelverzameling van I ,
- (iii) $|\phi_i(t) - f_i(t, \phi_1(t), \phi_2(t))| \leq \epsilon$, $i = 1, 2$, $t \in I \setminus (S_1 \cup S_2)$.

Stel nu $f_i(t, x) \in C(\bar{B})$, $x = (x_1(t), x_2(t))$ met $B = \{(t, x) \mid |t - \tau| < a, |x_j - \xi_j| < b_j; j = 1, 2\}$. Kies M_i zodanig dat $M_i = \max\{f_i(t, x)\}$ voor $(t, x) \in \bar{B}$ en $M = (M_1^2 + M_2^2)^{1/2}$ dan geldt:

STELLING 2.1. Zij $f_i \in C(\bar{B})$ voor $i = 1, 2$, en $(\tau, \xi) \in B$. We kunnen dan een $\alpha \in \mathbb{R}$ vinden, $0 < \alpha < a$, zodat $\forall \epsilon > 0$ er een ' ϵ -benaderende' oplossing $\phi(t)$ van (2.3) bestaat op $|t - \tau| \leq \alpha$ met $\phi(\tau) = \xi$.

BEWIJS. Zij $\epsilon > 0$ gegeven. Kies $\alpha = \min\{a, \frac{b_1}{M}, \frac{b_2}{M}\}$. We zullen nu een ' ϵ -benaderende' oplossing $\phi(t)$ construeren op $[\tau, \tau + \alpha]$. Eenzelfde constructie kan men uitvoeren op $[\tau - \alpha, \tau]$.

Daar $f_i \in C(\bar{B})$, dus uniform continu, bestaat er een $\delta_\epsilon > 0$ zodanig dat

$$(2.8) \quad |f_i(t, x) - f_i(\tilde{t}, \tilde{x})| < \frac{\epsilon}{2} \sqrt{2}, \quad i = 1, 2$$

voor (t, x) en $(\tilde{t}, \tilde{x}) \in \bar{B}$ en met

$$(2.9) \quad |t - \tilde{t}| < \delta_\epsilon \quad \text{en} \quad \|x - \tilde{x}\| < \delta_\epsilon$$

We voeren nu op $[\tau, \tau + \alpha]$ een zodanige partitie in dat

$\tau = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \tau + \alpha$ met

$$(2.10) \quad \max |t_k - t_{k-1}| \leq \min(\delta_\epsilon, \frac{\delta_\epsilon}{M}), \quad k = 1, \dots, n$$

en definiëren $\phi(t)$ als volgt:

$$(2.11a) \quad \phi_i(\tau) = \xi_i,$$

$$(2.11b) \quad \begin{aligned} \phi_i(t) &= \phi_i(t_{k-1}) + f_i(t_{k-1}, \phi_1(t_{k-1}), \phi_2(t_{k-1}))(t - t_{k-1}), \quad i = 1, 2, \\ t_{k-1} &< t \leq t_k, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Uit het begremsd zijn van $f_i(t)$ volgt dat $\phi_i(t)$ lokaal Lipschitz is:

$$(2.12) \quad |\phi_i(t) - \phi_i(\tilde{t})| \leq M_i |t - \tilde{t}|, \quad i = 1, 2,$$

voor $t, \tilde{t} \in [\tau, \tau + \alpha]$, dus

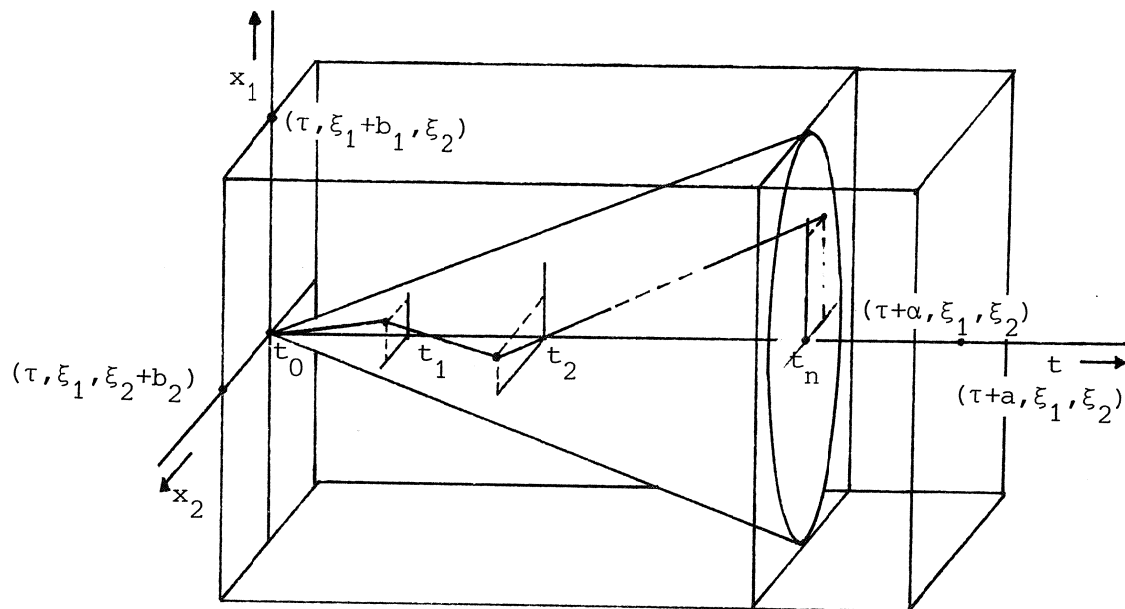
$$(2.13) \quad \|\phi(t) - \phi(\tilde{t})\| \leq (M_1^2 + M_2^2)^{\frac{1}{2}} (t - \tilde{t}) = M(t - \tilde{t}).$$

Nemen we nu een $t \in (t_{k-1}, t_k]$ dan volgt uit (2.10) dat $|t - t_{k-1}| \leq \delta_\epsilon$ en uit

$$(2.13) \quad \|\phi(t) - \phi(\tilde{t})\| \leq \delta_\epsilon M. \text{ Differentiatie van (2.11b) levert}$$

$$\phi'_i(t) = f_i(t_{k-1}, \phi_1(t_{k-1}), \phi_2(t_{k-1})), \quad i = 1, 2.$$

Met behulp van (2.8) geldt nu dat $\|\phi'(t) - f(t, \phi(t))\| < \epsilon$ waarmee is aangetoond dat $\phi(t)$ een ' ϵ -benaderende' oplossing is. $\square$



Figuur 2.1. De ' ϵ -benaderende' oplossing.

Het bestaan van oplossingen van (2.3) zal bewezen worden in stelling 2.2. Hierbij gebruiken we het volgende lemma.

LEMMA 2.1 (Ascoli). Zij $\{\phi_n\}$ een oneindige, uniform begrensde, equicontinue verzameling functies op een begrensd interval I . Dan bevat $\{\phi_n\}$ een deelrij $\{\phi_{n_p}\}$, $n_1 < n_2 < \dots$, die uniform op I convergeert.

BEWIJS. Zie [5].

STELLING 2.2. Zij $f \in C(\bar{B})$, dan is er een oplossing $\phi \in C'([\tau - \alpha, \tau + \alpha])$ van (2.3) met $\phi(\tau) = \xi$ en α als in stelling 2.1.

BEWIJS. Zij $\{\epsilon_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, een monotoon dalende rij positieve reële getallen met $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$. Uit stelling 2.1 volgt dat voor alle ϵ_n er een ' ϵ -benaderende' oplossing ϕ_n van (2.3) bestaat op $|t - \tau| \leq \alpha$ zodat $\phi_n(\tau) = \xi$. Kies bij elke ϵ_n zo'n ϕ_n . Uit (2.12) volgt dat $\|\phi_n(t) - \phi_n(\tilde{t})\| \leq M |t - \tilde{t}|$. Voor $t = \tau$ geldt $\|\phi_n(t) - \xi\| \leq M \frac{b_1}{M}$ zodat $\|\phi_n(t)\| \leq \|\xi\| + b_1$. Dus de rij $\{\phi_n\}$ is uniform begrensd en $\{\phi_n\}$ is een equicontinue verzameling. Met behulp van lemma 2.1 geldt nu dat er een deelrij $\{\phi_{n_k}\}$, $n_1 < n_2 < \dots$, van $\{\phi_n\}$

bestaat die uniform naar ϕ convergeert op $[\tau-\alpha, \tau+\alpha]$. Vanwege de uniforme convergentie is ook $\phi(t)$ continu op dit interval.

Deze limietfunctie ϕ is een oplossing van (2.3) omdat voor de ' ε -benaderende' oplossing ϕ_n geldt:

$$(2.14) \quad \phi_n(t) = \xi + \int_{\tau}^t (f(s, \phi_n(s)) + \Delta_n(s)) ds$$

met $\Delta_n(t) = \phi'_n(t) - f(t, \phi_n(t))$ waarin ϕ'_n bestaat en nul is op $S_1 \cup S_2$. Aangezien ϕ_n een ' ε -benaderende' oplossing is, geldt dus $\|\Delta_n(t)\| \leq \varepsilon_n$. Daar de vectorfunctie f uniform continu is op een compact gebied $\bar{B}$ en ϕ_{n_k} uniform naar ϕ convergeert op $[\tau-\alpha, \tau+\alpha]$ voor $k \rightarrow \infty$, volgt dat $f(t, \phi_{n_k}(t))$ uniform naar $f(t, \phi(t))$ convergeert op $[\tau-\alpha, \tau+\alpha]$ voor $k \rightarrow \infty$ en we verkrijgen

$$(2.15) \quad \phi(t) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, \phi(s)) ds.$$

Tevens geldt dan dat $\phi(\tau) = \xi$ en $\phi'(t) = f(t, \phi(t))$. Dus is $\phi \in C'([\tau-\alpha, \tau+\alpha])$ een oplossing van (2.3). $\square$

STELLING 2.3. Zij $f \in C(D)$ met $(\tau, \xi) \in D$, dan bestaat er een I en een oplossing $\phi \in C'(I)$ van (2.3) met $\tau \in I$.

BEWIJS. D is een open samenhangende verzameling dus is er een bol $B_r(\tau, \xi_1, \xi_2) \subset D$ met $r > 0$. Er is ook een blok B met $(\tau, \xi_1, \xi_2) \in B$ en $B \subset B_r \subset D$, hierop passen we nu stelling 2.2 toe. $\square$

Uit het volgende voorbeeld blijkt dat het continu zijn van f niet voldoende is om te zorgen dat er slechts één oplossing door een gegeven punt gaat

$$(2.15a) \quad x_1' = x_1^{1/3}$$

$$(2.15b) \quad x_2' = 0.$$

Er gaan oneindig veel oplossingen door $(0,0,0)$ op $I = [0,1]$, nl.:

$$(2.16a) \quad \phi_c(t) = (0,0) \quad 0 \leq t \leq c, \quad 0 \leq c \leq 1,$$

$$(2.16b) \quad \phi_c(t) = \left(\left(\frac{2}{3}(t-c) \right)^{3/2}, 0 \right) \quad c < t \leq 1.$$

We eisen nu voor f meer en stellen $f \in C(D)$ en f is Lipschitzcontinu in x .

DEFINITIE 2.4. Zij $f \in C(D)$. Als er een constante $k > 0$ bestaat zodanig dat voor alle (t, x) en $(t, \tilde{x}) \in D$ geldt

$$\|f(t, x) - f(t, \tilde{x})\| \leq k \cdot \|x - \tilde{x}\|,$$

dan heet f Lipschitzcontinu in x en k de Lipschitzconstante.

We noteren: $f \in C_k(D)$.

STELLING 2.4. Zij $f \in C_k(D)$ en ϕ, ψ respectievelijk ' ε_1 en ε_2 -benaderende' oplossingen van (2.3) op het interval (a, b) met $\tau \in (a, b)$. Laat tevens $\|\phi(\tau) - \psi(\tau)\| \leq \delta$, $\delta > 0$ en $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ dan geldt

$$\|\phi(t) - \psi(t)\| \leq \delta e^{k|t-\tau|} + \frac{\varepsilon}{k}(e^{k|t-\tau|} - 1), \quad t \in (a, b)$$

BEWIJS. Kies $t \in [\tau, b)$; voor $t \in (a, \tau]$ verloopt het bewijs analoog. Omdat ϕ en ψ ' ε -benaderende' oplossingen van (2.3) zijn geldt

$$(2.17) \quad \|\phi'(s) - f(s, \phi(s))\| \leq \varepsilon_1, \quad \|\psi'(s) - f(s, \psi(s))\| \leq \varepsilon_2, \quad s \notin S_1 \cup S_2.$$

Integratie naar t voor $t \in [\tau, b)$ levert dan

$$(2.18) \quad \|\phi(t) - \psi(t) - (\phi(\tau) - \psi(\tau)) - \int_{\tau}^t [f(s, \phi(s)) - f(s, \psi(s))] ds\| \leq \varepsilon(t - \tau)$$

we definiëren $r(t) = \|\phi(t) - \psi(t)\|$ waarmee (2.18) overgaat in

$$(2.19) \quad r(t) \leq r(\tau) + \int_{\tau}^t \|f(s, \phi(s)) - f(s, \psi(s))\| ds + \varepsilon(t - \tau).$$

Daar f Lipschitzcontinu is, kunnen we de integrand afschatten door $k\|\phi(s) - \psi(s)\| = k \cdot r(s)$,

$$(2.20) \quad r(t) \leq r(\tau) + \int_{\tau}^t k \cdot r(s) ds + \varepsilon(t - \tau).$$

Definieer nu $R(t) = \int_{\tau}^t r(s) ds$. Gegeven $r(\tau) \leq \delta$, wordt (2.20)

$$(2.21) \quad R'(t) - kR(t) \leq \delta + \varepsilon(t-\tau).$$

Integratie levert

$$(2.22) \quad R(t) \leq \frac{\delta}{k} (e^{k(t-\tau)} - 1) - \frac{\varepsilon}{k^2} (1+k(t-\tau)) + \frac{\varepsilon}{k^2} e^{k(t-\tau)}.$$

Uit (2.20) en (2.22) volgt dan de gevraagde ongelijkheid

$$(2.23) \quad \|\phi(t) - \psi(t)\| \leq \delta e^{k|t-\tau|} + \frac{\varepsilon}{k} (e^{k|t-\tau|} - 1). \quad \square$$

Een direct gevolg van stelling 2.4 is:

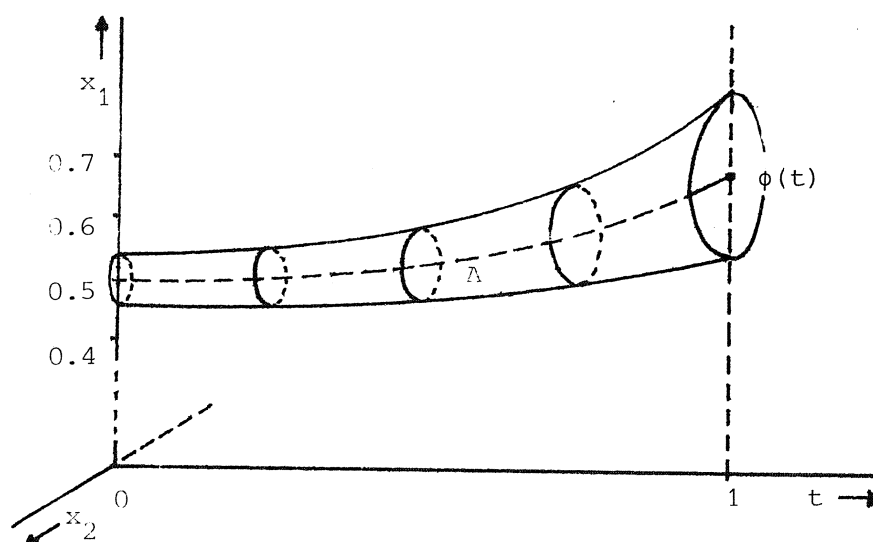
STELLING 2.5. Zij $f \in C_k(D)$ en $(\tau, \xi) \in D$. Als ϕ en ψ oplossingen van (2.3) zijn op (a, b) met $\phi(\tau) = \psi(\tau) = \xi$, dan geldt $\phi \equiv \psi$ op (a, b) .

Hiermee is de eenduidigheid van de oplossing aangetoond. In het vervolg beschouwen we steeds

$$x' = f(t, x) \quad f \in C_k(D) \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Existentie en eenduidigheid kunnen ook onder zwakkere condities worden aangetoond. (f meetbaar voor vaste x , continu in x voor vaste t en er bestaat een Lebesgue integreerbare functie m met $\|f(t, x)\| \leq m(t)$, $(t, x) \in D$). Voor ons is echter $f \in C_k$ voldoende.

Een tweede gevolg van stelling 2.1 is de continuïteit van ϕ in de beginwaarden. Laat namelijk ϕ en ψ oplossingen zijn van (2.3) met beginwaarden $\phi(\tau)$ en $\psi(\tau)$ dan geldt dat $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ en $\|\phi(t) - \psi(t)\| \leq \delta e^{k|t-\tau|}$, $t \in (a, b)$.



Figuur 2.2. Continuïteit in de beginwaarden ($k=1$, $\tau=0$, $\delta=0.05$, ψ ligt binnen A)

2.2. Afhankelijkheid van de beginwaarden

Alvorens in te gaan op het probleem van de afhankelijkheid van de oplossing van het systeem (2.3) van de beginwaarden zullen we het begrip 'dynamisch systeem' introduceren zoals in HIRSCH en SMALE [11]. Een dynamisch systeem is een manier om te beschrijven hoe alle punten van een verzameling S zich in de tijd verplaatsen. Voor S nemen we een open samenhangende deelverzameling van $\mathbb{R}^n$. Een dynamisch systeem, zoals (2.3), vertelt ons waar $x \in S$ zich bevindt op een of ander willekeurig tijdstip. Door t nu continu de reële rechte te laten doorlopen verkrijgen we een trajectorie $x(t)$.

Om de afhankelijkheid van $\phi(t)$ van de beginwaarde x , zoals in paragraaf 2.1 beschreven, aan te geven noteren we $\phi(t)$ als $\phi(t, x)$ of $\phi_t(x)$.

DEFINITIE 2.5. Een dynamisch systeem noemen we een familie van continue afbeeldingen $\phi_t: S \rightarrow S$, waarvoor geldt dat

(i) ϕ_0 is de identieke afbeelding,

(ii) $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s} \quad \forall t, s \in \mathbb{R}.$

$\phi_t \in C(S)$ als gevolg van stelling (2.4) en ϕ_t heeft een inverse ϕ_{-t} voor alle $t \in \mathbb{R}$. Uit stelling (2.4) volgt tevens dat er voor alle $x \in S$ slechts één ϕ_t bestaat met $\phi_0 = x$.

Laat nu $D \subset \mathbb{R} \times S$ de volgende verzameling zijn

$$(2.24) \quad D = \{(t, x) \mid t \in I, x \in S\}$$

en veronderstel verder dat f gedefinieerd is op D .

STELLING 2.6. $\phi: D \rightarrow S$ is een continue afbeelding.

BEWIJS. We bewijzen eerst dat D een open deelverzameling van $\mathbb{R} \times S$ is.

Laat $t_0 \geq 0$ zijn (voor $t_0 \leq 0$ geldt een eender bewijs) en $(t_0, x_0) \in D$ dan is de trajectorie $\phi(t, x_0)$ gedefinieerd op $[0, t_0]$ en dus ook op $[-\varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ voor zekere $\varepsilon > 0$. Volgens [11, blz. 173] is er nu een omgeving U van x_0 met $U \subset S$, zodanig dat $\phi(t, x)$ gedefinieerd is op $[-\varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ voor alle $x \in U$. Hieruit volgt dat $(t_0, x_0) \in (-\varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times U \subset D$ dus is D een open verzameling.

We laten nu zien dat $\phi: D \rightarrow S$ continu is in (t_0, x_0) . Zij $|t_0 - t_1| < \frac{\delta}{2}$ en $\|x_0 - x_1\| < \frac{\delta}{2}$, dan geldt

$$(2.25) \quad \|\phi(t_0, x_0) - \phi(t_1, x_1)\| \leq \|\phi(t_1, x_1) - \phi(t_1, x_0)\| + \|\phi(t_1, x_0) - \phi(t_0, x_0)\|$$

De eerste term uit het rechterlid gaat naar nul als $x_1 \rightarrow x_0$, dus ook als $\delta \rightarrow 0$. De tweede term gaat eveneens naar nul doordat de trajectorie door x_0 continu is in t . Dus wanneer we $\delta \leq \varepsilon$ kiezen geldt

$$\|\phi(t_0, x_0) - \phi(t_1, x_1)\| \leq \delta \leq \varepsilon. \quad \square$$

Beschouw het autonome systeem

$$(2.26) \quad \dot{x} = f(x), \quad x \in D, \quad f \in C_k^n(D).$$

We zullen aantonen dat $\phi(t, x) \in C^n(D)$ als $f \in C^n(D)$, $n \geq 1$. Laat $x(t)$ een oplossing zijn van (2.26) voor $t \in I$ die voldoet aan $x(t_0) = x_0$ met $t_0 \in I$. Stel $A(t) = J[f(x(t))]$ waarin de operator J de Jacobiaan van f voorstelt.

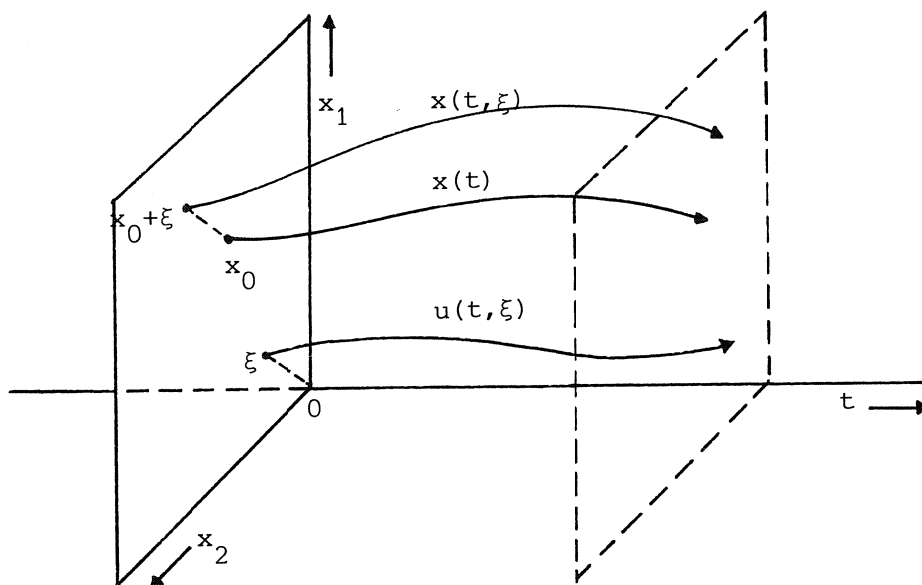
$A(t)$ is continu in t omdat $f \in C^1(D)$. Definieer tevens het niet-autonome lineaire systeem

$$(2.27) \quad \dot{u} = A(t)u.$$

Uit de theorie van paragraaf 2.1 volgt dat (2.27) een unieke oplossing heeft voor alle beginwaarden $u(t_0) = u_0$, $t_0 \in I$. Wanneer u_0 nu klein is geldt dat $x(t) + u(t)$ een goede benadering is voor de oplossing $y(t)$ van (1.1) met beginwaarde $y(t_0) = x_0 + u_0$.

We definiëren $u(t, \xi)$ als die oplossing van (2.27) die op tijdstip t_0 door ξ gaat en $x(t, \xi)$ als de oplossing van (2.26) die op tijdstip t_0 door $x_0 + \xi$ gaat, zoals in figuur 2.3.

We leiden dan het volgende lemma af.



Figuur 2.3. Uniforme benadering van $x(t)$. ($t_0=0$)

LEMMA 2.2. Zij $I_0 \subset I$ een compact interval met $t_0 \in I_0$. Dan geldt uniform op I_0

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\|x(t, \xi) - x(t) - u(t, \xi)\|}{\|\xi\|} = 0.$$

BEWIJS. Neem $t_0 = 0$. De corresponderende vergelijkingen hebben de vorm

$$(2.28a) \quad x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s)) ds$$

$$(2.28b) \quad x(t, \xi) = x_0 + \xi + \int_0^t f(x(s, \xi)) ds$$

$$(2.28c) \quad u(t, \xi) = \xi + \int_0^t J[f(x(s))] u(s, \xi) ds$$

definiëren we nu $g(t) = \|x(t, \xi) - x(t) - u(t, \xi)\|$, dan leveren de vergelijkingen 2.28 de volgende schatting

$$(2.29) \quad g(t) \leq \int_0^t \|f(x(s, \xi)) - f(x(s)) - J[f(x(s))] u(s, \xi)\| ds.$$

Uit de Taylorontwikkeling weten we dat

$$(2.30) \quad f(x) - f(\tilde{x}) = J[f(\tilde{x})](x - \tilde{x}) + R(\tilde{x}, x - \tilde{x})$$

met

$$\lim_{x \rightarrow \tilde{x}} \frac{R(\tilde{x}, x - \tilde{x})}{\|x - \tilde{x}\|} = 0,$$

zodat (2.29) overgaat in

$$(2.31) \quad g(t) \leq \int_0^t \|J[f(x(s))](x(s, \xi) - x(s)) - J[f(x(s))] u(s, \xi) + \\ + R(x(s), x(s, \xi) - x(s))\| ds,$$

waaruit direct volgt

$$(2.32) \quad g(t) \leq \int_0^t \|J[f(x(s))]\| \cdot g(s) ds + \int_0^t \|R(x(s), x(s, \xi) - x(s))\| ds.$$

Aangezien f Lipschitzcontinu is en I_0 een compacte verzameling is, bestaat er een $N < \infty$ met $N \geq \max_{s \in I_0} \{\|J[f(x(s))]\|\}$. Verder geldt uit (2.30): $\forall \epsilon > 0 \exists \delta_0 > 0$ zodanig dat $\|R(x(s), x(s, \xi) - x(s))\| \leq \epsilon \|x(s, \xi) - x(s)\|$ als

$\|x(s, \xi) - x(s)\| < \delta_0$ en $s \in I_0$, zodat

$$(2.33) \quad g(t) \leq N \int_0^t g(s) ds + \varepsilon \int_0^t \|x(s, \xi) - x(s)\| ds.$$

Met behulp van stelling 2.4 kunnen we een $\delta_1 > 0$ vinden zodanig dat $\|x(s, \xi) - x(s)\| \leq |\xi| e^{ks} \leq \delta_0$ als $|\xi| \leq \delta_1$ en $s \in I_0$. Wanneer dus geldt dat $|\xi| \leq \delta_1$ dan gaat (2.33) over in

$$(2.34) \quad g(t) \leq N \int_0^t g(s) ds + \varepsilon \int_0^t |\xi| e^{ks} ds = N \int_0^t g(s) ds + C\varepsilon |\xi|$$

met $C = C(t, k)$. Dit levert de volgende schatting

$$(2.35) \quad g(t) \leq C\varepsilon |\xi| e^{Nt} \quad \text{voor } t \in I_0 \quad \text{en} \quad |\xi| \leq \delta_1 = \delta_1(\varepsilon),$$

waaruit volgt dat $\frac{g(t)}{|\xi|} \rightarrow 0$ uniform op I_0 . $\square$

STELLING 2.7. Zij ϕ het dynamisch systeem van $\dot{x} = f(x)$, $x \in D$ en $f \in C^1(D)$ dan geldt $\phi \in C^1(D)$.

BEWIJS. De afgeleide naar t , $\partial\phi/\partial t = f(\phi_t(x))$, bestaat en is continu daar f continu is. Om de afgeleide naar x_i , $\partial\phi/\partial x_i$, te berekenen handelen we als volgt. Zij ξ klein. We passen nu lemma 2.2 toe op

$$(2.36) \quad \phi(t, x_0 + \xi) - \phi(t, x_0) = x(t, \xi) - x(t).$$

We vinden dan

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \lim_{\xi \rightarrow 0} (x(t, \xi) - x(t)) = u(t, \xi).$$

De continuïteit van $\partial\phi/\partial x_i$ is een gevolg van de continuïteit in de beginwaarden en het lineair zijn van de matrix $A(t)$. $\square$

STELLING 2.8. Zij ϕ het dynamisch systeem van $\dot{x} = f(x)$, $x \in D$ en $f \in C^r(D)$ dan geldt $\phi \in C^r(D)$, $1 \leq r \leq \infty$.

BEWIJS. We passen volledige inductie toe

- (i) Voor $r = 1$ is de uitspraak juist (stelling 2.7).
- (ii) Laat nu $r \geq 2$ zijn en stel dat het dynamisch systeem ϕ van een willekeurig stelsel differentiaalvergelijkingen $\dot{\xi} = F(\xi)$ $(r-1)$ -maal continu differentieerbaar is als $F \in C^{r-1}(D \times D)$. Kies $F: D \times D \rightarrow D \times D$, zodanig dat geldt

$$(2.37) \quad F(x, u) = (f(x), J[f(x)] \cdot u)$$

met $\dot{x} = f(x)$ en $\dot{u} = J[f(x)] \cdot u$.

Daar $f \in C^r(D)$ geldt dat $F \in C^{r-1}(D \times D)$ en derhalve, wegens de inductieveronderstelling, dat het dynamisch systeem ϕ van $\frac{d}{dt}(x, u) = F(x, u)$ $(r-1)$ -maal continu differentieerbaar is.

Voor ϕ geldt echter met behulp van (2.37)

$$\phi(t, (x, u)) = (\phi(t, x), J[\phi_t(x)] \cdot u),$$

waaruit blijkt dat $J[\phi_t(x)] \cdot u \in C^{r-1}(D)$ zodat $\partial\phi/\partial x (= J[\phi_t(x)] \cdot u) \in C^{r-1}(D)$. Tevens geldt dat $\partial\phi/\partial t \in C^{r-1}(D)$ want $\partial\phi/\partial t = f(\phi_t(x)) \in C^r(D)$.

Er geldt dus uiteindelijk dat $\phi' \in C^{r-1}(D)$ is en dus dat $\phi \in C^r(D)$. $\square$

Stelling 2.7 en 2.8 werden bewezen voor autonome systemen. Ze gelden echter ook voor niet-autonome systemen wanneer we een doorsnijding maken met de deelvariëteit $x_n = t$.

2.3. De Poincaré-afbeelding en Brouwer's dekpuntstelling

We beschouwen in het vervolg het twee dimensionale systeem

$$(2.38) \quad \dot{x} = f(x, t), \quad f(x, t) = f(x, t + \omega)$$

met $f \in C^1(D)$, $D = \mathbb{R}^3$.

DEFINITIE 2.6. De Poincaré-afbeelding P_ω noemen we de afbeelding

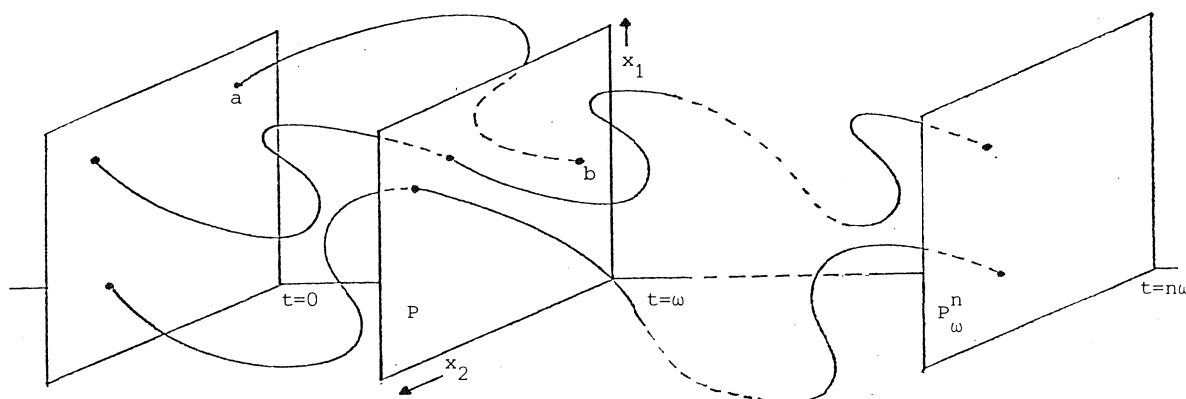
$P_\omega: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ met $P_\omega(a) = \phi(\omega, a) = b$ waarbij ϕ het door (2.38) gedefinieerde dynamische systeem is.

Wanneer dus $a \in \mathbb{R}^n$ is en $\phi(t, a)$, gedefinieerd door (2.38), de trajectorie door de beginwaarde a voorstelt, dan wordt door P_ω aan a het punt b van die trajectorie toegevoegd met $t = \omega$. We vinden zo een differentievergelijking

$$(2.39) \quad x_{t+\omega} = P_\omega(x_t),$$

met $P_\omega \in C^k(S)$ als $f \in C^k(D)$, $k \geq 1$.

Als $\omega = 1$ noemen we $P_\omega = P$.



Figuur 2.4. De Poincaré-afbeelding

DEFINITIE 2.7. Het punt $a \in \mathbb{R}^n$ heet een dekpunt van de afbeelding P_ω als $P_\omega^k(a) = a$ voor $k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$.

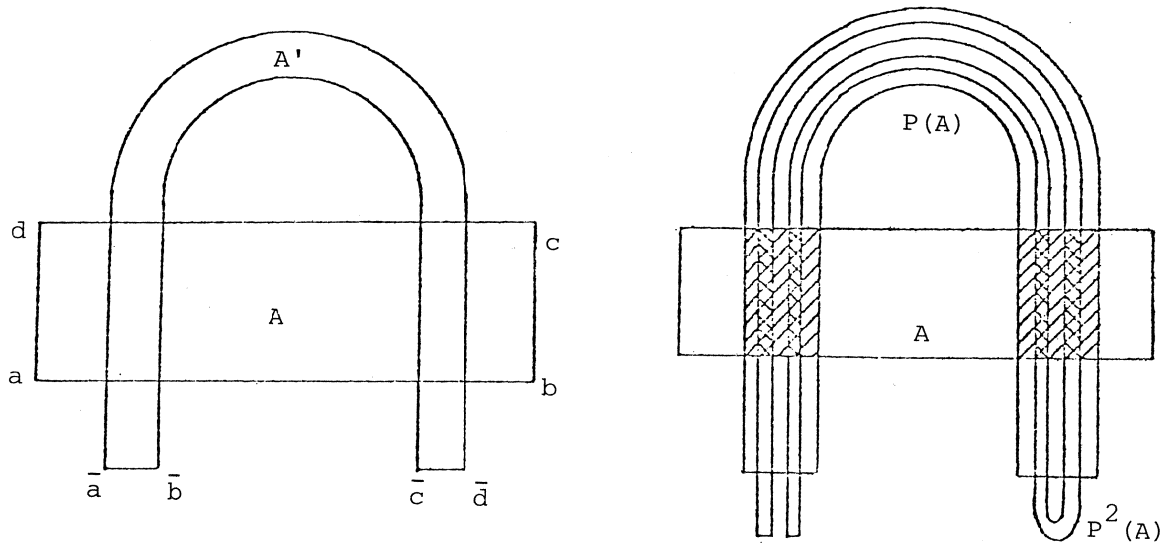
STELLING 2.9 (Brouwer's dekpuntstelling). *Iedere afbeelding van de eenheidsbol naar zichzelf heeft een dekpunt.*

BEWIJS. Zie LEFSCHETZ [15]. $\square$

Laat nu S een deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ zijn die als volgt gedefinieerd is $S = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in [a_1, a_2], x_2 \in [b_1, b_2]; a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}\}$. Een gevolg van Brouwer's dekpuntstelling is dat wanneer we de Poincaré-afbeelding P_ω

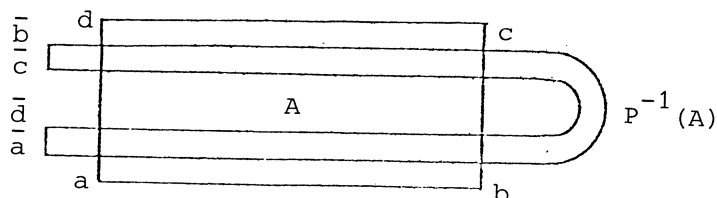
toepassen op de deelverzameling S en $P_\omega(S) \subset S$ de afbeelding P_ω een dekpunt heeft in S .

De verzameling van dekpunten van een afbeelding kan zeer exotische vormen aannemen, getuige het volgende voorbeeld: de zogenaamde 'horseshoe'-afbeelding van Smale, zie TAKENS [18].



Figuur 2.5. Horseshoe van Smale

Zij A een rechthoek in $\mathbb{R}^2$ met hoekpunten a, b, c en d . We construeren nu een diffeomorfisme $P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ met $P(A) = A'$ zoals in figuur 2.5, $P(A') = P(P(A)) = P^2(A)$, enz. Beschouw de verzameling $U = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} P^i(A)$. Om de structuur van U te vinden bekijken we eerst $A \cap P(A) \cap P^2(A)$ (zie figuur 2.5). Hieruit blijkt dat $\bigcap_{i=0}^n P^i(A)$ de vereniging is van 2^n rechthoeken en dat dus $\bigcap_{i=0}^\infty P^i(A)$ het produkt is van een Cantorverzameling met een gesloten interval. Uit de definitie van P volgt dat $P^{-1}(A)$ de vorm moet hebben zoals in figuur 2.6. Er volgt dan met bovenstaande redenering dan $U = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} P^i(A)$ een produkt is van twee Cantorverzamelingen. We kunnen nu een homeomorfisme ψ construeren van U naar $(0,1)^{\mathbb{Z}} = \{(\dots, a_i, \dots, a_0, \dots) \mid i \in \mathbb{Z}, a_i = 0,1\}$. Nummer de componenten van $A \cap P(A)$ nul en één. Zij nu $a \in U$ en definieer $\psi(a) = (a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ met $P^i(a)$ is de a_i -de component van $A \cap P(A)$. Het geïnduceerde homeomorfisme $\tilde{P}$ op $(0,1)^{\mathbb{Z}}$ wordt nu gedefinieerd door $\tilde{P} = \psi \circ P \circ \psi^{-1}$, zodanig dat wanneer $\tilde{P}((a_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = (a'_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ dat $a_i = a'_{i-1}$ en $\tilde{P}$ is een translatie. De dekpunten van $\tilde{P}$ liggen nu dicht in $(0,1)^{\mathbb{Z}}$, dus de dekpunten van P liggen dicht in U .



Figuur 2.6. De afbeelding $P^{-1}(A)$

We zullen echter zulke voorbeelden verder niet tegenkomen.

DEFINITIE 2.8. Zij $P_\omega(a) = a$. De oplossingskromme van $\dot{x} = f(t, x)$ met beginwaarde a heet de harmonische oplossing met periode ω . Wanneer er geldt dat $P_\omega^k(a) = a$ met $k > 1$ en $P_\omega^n(a) \neq a$ voor $1 \leq n < k$ dan noemen we de oplossingskromme met beginwaarde a de k -de subharmonische oplossing met periode $k\omega$.

In plaats van de afbeelding P zullen we vaak de functionaal $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gebruiken

$$(2.40a) \quad V(x) = \|P(x) - x\|$$

$$(2.40b) \quad V_i(x) = \|P^i(x) - x\|, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Door een punt $a \in \mathbb{R}^n$ loopt nu een periodieke oplossing met periode i dan en slechts dan wanneer $V_i(x) = 0$, $i \geq 1$ en $V_j(x) \neq 0$ $0 < j < i$.

We zullen deze functionaal bij de numerieke behandeling weer tegenkomen en verder uitwerken.

2.4. Stabiliteit van periodieke oplossing

DEFINITIE 2.9. Een oplossing ϕ van het systeem $\dot{x} = f(t, x)$ heet stabiel als voor alle $\varepsilon > 0$ er een $\delta > 0$ bestaat, zodanig dat voor alle oplossingen ψ met $\|\phi_0 - \psi_0\| < \delta$ geldt $\|\phi_t - \psi_t\| < \varepsilon$. De oplossing ϕ heet asymptotisch stabiel wanneer tevens geldt $\|\phi_t - \psi_t\| \rightarrow 0$ voor $t \rightarrow \infty$.

In termen van de Poincaré-afbeelding betekent dit dat door a een stabiele periodieke oplossing loopt wanneer voor alle $\varepsilon > 0$ er een $\delta > 0$ is

met $\|P^k(\xi) - a\| < \varepsilon$, $k \geq 1$ als $\|\xi - a\| < \delta$.

STELLING 2.10. Een oplossing door een dekpunt p van P_ω is asymptotisch stabiel als de eigenwaarden van de matrix $J[P_\omega]_p$ in absolute waarde kleiner of gelijk één zijn.

BEWIJS. Zij ε een kleine afwijking uit het evenwicht p en definieer $\xi_t = p + \varepsilon_t$. Er geldt nu via het differentieschema (2.39) dat

$$(2.41) \quad p + \varepsilon_{t+\omega} = P_\omega(p + \varepsilon_t)$$

waarin we het rechterlid via de Taylorontwikkeling kunnen herschrijven als

$$(2.42) \quad p + \varepsilon_{t+\omega} = P_\omega(p) + J[P_\omega]_p \cdot \varepsilon_t,$$

waaruit direct volgt dat $\varepsilon_{t+\omega} = J[P_\omega]_p \cdot \varepsilon_t$. Wanneer nu λ_i de eigenwaarden zijn van $J[P_\omega]$ en E_i de respectievelijke eigenvectoren voor $i = 1, \dots, n$ dan kunnen we ε_t schrijven als

$$(2.43a) \quad \varepsilon_t = c_1 E_1 + \dots + c_n E_n, \quad c_i \in \mathbb{R} \quad \text{voor } i = 1, \dots, n.$$

Er volgt dan dat $\varepsilon_{t+\omega} = c_1 \lambda_1 E_1 + \dots + c_n \lambda_n E_n$. Definieer nu $\lambda = \max_{i=1, \dots, n} \{\|\lambda_i\|\}$ dan verkrijgen we de volgende afschatting

$$(2.44) \quad \begin{aligned} \|\varepsilon_{t+\omega}\| &= \|c_1 \lambda_1 E_1 + \dots + c_n \lambda_n E_n\| \leq \lambda \|c_1 E_1 + \dots + c_n E_n\| \\ &= \lambda \|\varepsilon_t\|, \end{aligned}$$

daar $\|\varepsilon_{t+\omega}\| < \|\varepsilon_t\|$ geldt dus $\|\lambda\| < 1$.

De ongelijkheid $\|\lambda\| < 1$ is tevens een nodige voorwaarde, want stel $\|\lambda_j\| < 1$ voor $j = 1, \dots, n, j \neq q$ en $\|\lambda_q\| > 1$ dan geldt dat

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\varepsilon_{t+k\omega}\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|c_1 \lambda_1^k E_1 + \dots + c_n \lambda_n^k E_n\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_q^k \|c_q E_q\|$$

dus $\|\varepsilon_{t+k\omega}\| \rightarrow \infty$ voor $k \rightarrow \infty$. Tegenspraak. $\square$

Wanneer p een dekpunt is met een periode groter dan één dan moeten we $J[p]_p$ vervangen door $\prod_{i=1}^k J[p]_{p_i}$.

Als laatste in dit hoofdstuk definiëren we het attractiegebied.

DEFINITIE 2.10. Het attractiegebied van een dekpunt p van de afbeelding $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ is een deelverzameling S van $\mathbb{R}^n$ met $s \in S$ en $\lim_{k \rightarrow \infty} \|P^k(s) - p\| = 0$.

3. NUMERIEKE INTEGRATIE VAN HET BEGINWAARDEPROBLEEM

3.1. Enkele differentieschema's

$$(3.1a) \quad \dot{x} = f(t, x), \quad f \in C_k^m(D), \quad m \geq 1$$

$$(3.1b) \quad x(\tau) = \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

$$(3.1c) \quad t \in [\tau, b].$$

In hoofdstuk 2 constateerden we dat (3.1) equivalent is met $x(t) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, x(s)) ds$, $\tau \leq t \leq b$. De oplossing van (3.1) is dan de limiet van de rij $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ met

$$(3.2a) \quad x_0(t) = \xi$$

$$(3.2b) \quad x_k(t) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, x_{k-1}(s)) ds, \quad k = 1, 2, \dots$$

Bij een discretisatiemethode benaderen we de oplossing van (3.1) in een eindig aantal vast gekozen punten t_i zodanig dat $\tau = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_N = b$. We zoeken dus voor iedere $x_k = x(t_k)$ een benadering, zeg u_k . Hiertoe reduceren we (3.1) eerst tot een autonoom stelsel door invoering van de variabele $x_n = t$. Stelsel (3.1) gaat dan over in

$$(3.3a) \quad \dot{x} = f(x), \quad f \in C_k^m(D),$$

$$(3.3b) \quad x(\tau) = \xi.$$

Voor de numerieke analyse van deze klasse problemen volgen we in grote lijnen de syllabus van VAN DER HOUWEN [12]. Voor dit autonome systeem bespreken we een eenstapsmethode, dwz. u_{n+1} wordt rechtstreeks uit u_n berekend en niet uit $u_{n-1}, u_{n-2}, \dots$. We verkrijgen zo een recurrente betrekking

$$(3.4) \quad u_{n+1} = E_n u_n, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

waarin E_n over het algemeen een niet-lineaire operator is die van het stapnummer afhangt. Stel dat we voor een algemeen differentieschema de trapeziumregel toepassen

$$(3.5) \quad u_{n+1} - \frac{1}{2}h_n f(u_{n+1}) = u_n + \frac{1}{2}h_n f(u_n).$$

Stel verder dat u_n als beginapproximatie wordt genomen en dat het m -de iteratieresultaat als uiteindelijke benadering voor de oplossing u_{n+1} wordt gebruikt. Dan verkrijgen we het volgende rekenschema

$$(3.6a) \quad u_{n+1}^{(0)} = u_n,$$

$$(3.6b) \quad u_{n+1}^{(j)} = [u_n + \frac{1}{2}h_n f(u_n)] + \frac{1}{2}h_n f(u_{n+1}^{(j-1)}) \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

$$(3.6c) \quad u_{n+1} = u_{n+1}^{(m)}.$$

Dit proces levert u_{n+1} als lineaire combinatie van u_n en $f(u_{n+1}^{(j)})$, $j = 0, 1, \dots, m-1$, waarbij de argumenten van f ook weer lineaire combinaties zijn van u_n en $f(u_{n+1}^{(\ell)})$, $\ell = 0, 1, \dots, j-1$. Formule (3.6) behoort dus tot de volgende klasse

$$(3.7a) \quad u_{n+1}^{(0)} = u_n,$$

$$(3.7b) \quad u_{n+1}^{(j)} = u_n + h_n \sum_{\ell=0}^{j-1} \lambda_{j,\ell} f(u_{n+1}^{(\ell)}), \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

$$(3.7c) \quad u_{n+1} = u_{n+1}^{(m)}.$$

Schema (3.7) stelt het algemene schema van een m -punts Runge-Kuttamethode voor. Zo'n Runge-Kuttamethode wordt gekarakteriseerd door de gegenereerde

matrix $\lambda_{j,\ell}$ met rij-index j , $j = 0, 1, \dots, m$ en kolomindex ℓ , $\ell = 0, 1, \dots, m-1$ en verder is $\lambda_{j,\ell} = 0$ wanneer $j \leq \ell$. We geven hier een voorbeeld van een 1-punts Runge-Kuttamethode (Euler) en een 2-punts Runge-Kuttamethode.

$$\begin{aligned}
 \underline{m = 1} \quad & \lambda_{j,\ell} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
 & u_{n+1}^{(0)} = u_n, \\
 & u_{n+1}^{(1)} = u_n + h_n \sum_{\ell=0}^0 \lambda_{j,\ell} f(u_{n+1}^{(\ell)}) = u_n + h_n f(u_n), \\
 & u_{n+1} = u_n + h_n f(u_n). \\
 \underline{m = 2} \quad & \lambda_{j,\ell} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\
 & u_{n+1}^{(0)} = u_n, \\
 & u_{n+1}^{(1)} = u_n + h_n \lambda_{1,0} f(u_n) = u_n + h_n f(u_n), \\
 & u_{n+1}^{(2)} = u_n + h_n \{ \lambda_{2,0} f(u_n) + \lambda_{2,1} f(u_{n+1}^{(1)}) \}, \\
 & u_{n+1} = u_n + h_n \{ \frac{1}{2} f(u_n) + \frac{1}{2} f(u_n + h_n f(u_n)) \}.
 \end{aligned}$$

3.2. Consistentie en convergentie van differentieschema's

We kiezen een eindige rij roosterpunten t_n , $n = 0, 1, \dots, N$, met $t_{n-1} < t_n$ en t_0 en t_N gegeven waarden die respectievelijk het begin- en eindpunt voorstellen van het integratieinterval

$$(3.8) \quad T_n = \{t_n\}_{n=0}^N.$$

Deze roosterpunten genereren een rij integratiestappen

$$(3.9) \quad H = \{h_n\}_{n=0}^{N-1}, \quad h_n = t_{n+1} - t_n.$$

Voor een gegeven rij integratiestappen definiëren we de volgende produkt-ruimte

$$(3.10) \quad P_H = \prod_{n=0}^N \mathbb{R}^2.$$

De elementen van P_H zijn rijen $\{x_n\}_{n=0}^N$ van vectoren $x_n \in \mathbb{R}^n$. Deze rijen geven we aan met X_H

$$(3.11) \quad X_H = \{x_n\}_{n=0}^N.$$

We definiëren op P_H de volgende operaties: $X_H + X'_H = \{x_n + x'_n\}_{n=0}^N$ en $\alpha X_H = \{\alpha x_n\}_{n=0}^N$. P_H is nu een lineaire ruimte. Een differentieschema wordt nu gedefinieerd door

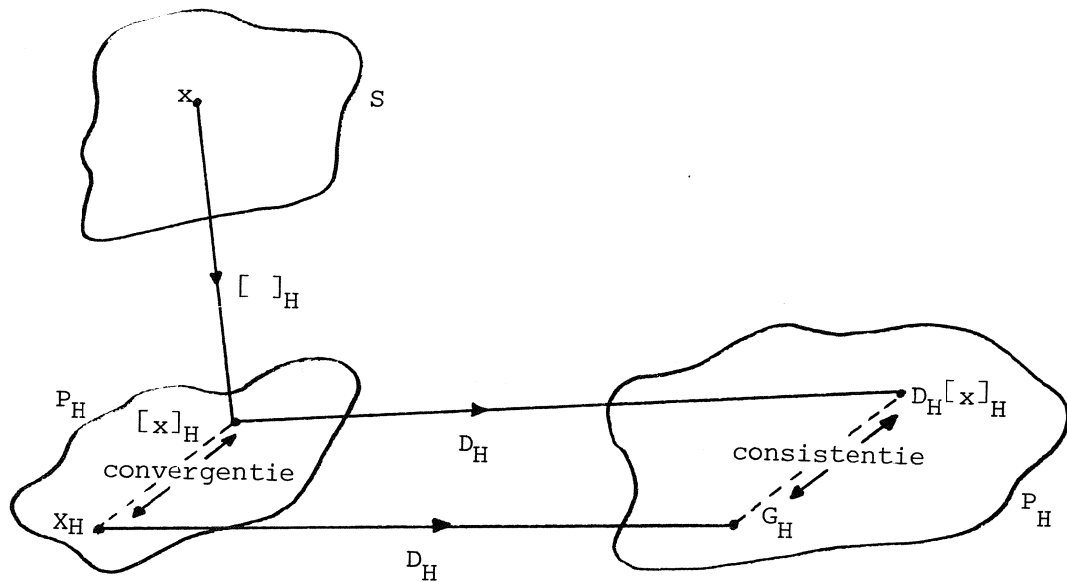
$$(3.12) \quad D_H X_H = G_H,$$

waarin $D_H: P_H \rightarrow P_H$ de differentieoperator is die voldoet aan $x_0 = g_0$. Schema (3.12) noemen we een discreet beginwaardeprobleem.

We willen het analytisch beginwaardeprobleem met het discrete beginwaardeprobleem vergelijken en voorwaarden opstellen waarvoor het discrete probleem het analytische benadert. Daartoe definiëren we de oplossingsruimte S van het analytisch probleem

$$(3.13) \quad S = \{x \mid \dot{x} = f(x)\}, \quad f \in C_k^m(D).$$

Laat tenslotte $[]_H$ de discretiseringsoperator zijn met $[]_H: S \rightarrow P_H$ zodanig dat $[x]_H = \{x(t_n)\}_{n=0}^N$. Met behulp van de $[]_H$ -operator kunnen we het analytische en het discrete beginwaardeprobleem vergelijken (zie figuur 3.1). We noemen de rij $D_H[x]_H - G_H$ de rij der afbreekfouten. De elementen uit deze rij heten de lokale afbreekfouten.



Figuur 3.1. Schematische voorstelling van het convergent en consistent zijn van een differentieschema.

DEFINITIE 3.1. Differentieschema $D_H X_H = G_H$ heet een consistente benadering van de differentiaalvergelijking (3.3) wanneer voor alle $x \in S$ geldt:

$$||| D_H[x]_H - G_H ||| \rightarrow 0 \quad \text{wanneer } h \rightarrow 0$$

waarin $h = \max_{n \in (0,1,\dots,N-1)} \{h_n\}$ en $||| x_H ||| = \max_{n \in (0,1,\dots,N)} ||x_n||$

Wanneer de afbreekfout van de orde $p+1$ in h naar nul convergeert dan is de benadering consistent van orde p ten opzichte van de norm $||| |||$.

De consistentieanalyse van p -punts Runge-Kuttamethoden is nogal uitgebreid. Deze analyse is voor $p \leq 8$ uitgevoerd door BUTCHER [3]. Hier zullen we de consistentieanalyse op een 2-punts Runge-Kuttamethode toepassen. Beschouw de algemene 2-puntsmethode

$$(3.14) \quad x_{n+1} = E_n(x_n) = x_n + \lambda_{2,0} h_n f(x_n) + \lambda_{2,1} h_n f(x_n + \lambda_{1,0} h_n f(x_n))$$

We ontwikkelen nu $x(t_n + h_n)$ en $E_n(x(t_n))$ naar h_n waarbij de coëfficiënten in f worden uitgedrukt zodat we ze kunnen vergelijken:

$$(3.15) \quad x(t_n + h_n) = x(t_n) + \frac{h_n}{1!} \left(\frac{dx}{dt} \right)_{t=t_n} + \frac{h_n^2}{2!} \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right)_{t=t_n} + \dots,$$

$$(3.16) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{df(x)}{dt} = \frac{df(x)}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{df(x)}{dx} \cdot f(x) = (f(x) \cdot \nabla) f(x),$$

waarin ∇ de gradiëntoperator is. We kunnen nu (3.15) en (3.16) combineren zodat

$$(3.17) \quad x(t_n + h_n) = [x + h_n f(x) + \frac{h_n^2}{2} (f(x) \cdot \nabla) f(x) + \dots + \frac{h_n^j}{j!} (f(x) \cdot \nabla)^{j-1} f(x) \dots]_{t=t_n}.$$

Voor de ontwikkeling van $E_n(x(t_n))$ beschouwen we eerst de volgende vergelijking

$$(3.18) \quad f(x+\eta) = f(x) + (\eta \cdot \nabla) f(x) + \frac{1}{2} (\eta \cdot \nabla)^2 f(x) + \dots + \frac{1}{j!} (\eta \cdot \nabla)^j f(x) + \dots,$$

waarin η een incrementvector onafhankelijk van x is. Wanneer we nu $\eta = \lambda_{1,0} h_n f(x)$ laten zijn dan gaat (3.18) over in

$$(3.19) \quad f(x + \lambda_{1,0} h_n f(x(t_n))) = f(x) + \lambda_{1,0} h_n (f(x(t_n)) \cdot \nabla) f(x) + \\ + \frac{1}{2} \lambda_{1,0}^2 h_n^2 (f(x(t_n)) \cdot \nabla)^2 f(x) + \dots$$

Er volgt nu uit (3.14) en (3.19) dat

$$(3.20) \quad E_n(x(t_n)) = [(x + \lambda_{2,0} h_n f(x) + \lambda_{2,1} h_n [f(x) + \\ + \lambda_{1,0} h_n (f(x(t_n)) \cdot \nabla) f(x) + \dots]_{t=t_n}]_{t=t_n}.$$

Vergelijken we nu (3.17) met (3.20) dan verkrijgen we

$$(3.21) \quad x(t_n + h_n) - E_n(x(t_n)) = (1 - \lambda_{2,0} - \lambda_{2,1}) h_n f(x(t_n)) + \\ + (\frac{1}{2} - \lambda_{2,1} \cdot \lambda_{1,0}) h_n^2 (f(x(t_n)) \cdot \nabla) f(x) \Big|_{t=t_n} + O(h_n^3).$$

Er geldt nu dus dat (3.14) eerste orde consistent is wanneer $\lambda_{2,0} + \lambda_{2,1} = 1$ en tweede orde consistent wanneer $\lambda_{2,1} \cdot \lambda_{1,0} = \frac{1}{2}$. We kunnen de elementen van de door de Runge-Kuttamethode gegenereerde matrix $\lambda_{j,\ell}$ dus zodanig kiezen dat de methode consistent is tot op zekere orde. Consistentie van het differentieschema garandeert nog niet dat de differentieoplossing naar de analytische oplossing convergeert voor $h \rightarrow 0$. Het differentieschema is slechts een formele benadering van de differentiaalvergelijking. Dat wil zeggen dat wanneer $D_H[x]_H \rightarrow G_H$ voor $h \rightarrow 0$ niet noodzakelijk $[x]_H \rightarrow X_H$ voor $h \rightarrow 0$ (zie figuur 3.1).

DEFINITIE 3.2. Differentieschema $D_H X_H = G_H$ heet convergent wanneer voor alle $s \in S$ geldt:

$$||| [x]_H - X_H ||| \rightarrow 0 \quad \text{wanneer } h \rightarrow 0;$$

$[x]_H - X_H$ heet de discretisatiefout.

De consistentievoorwaarden definieerden een deelverzameling van de parameterruimte waarop de eenstapsmethode is gedefinieerd. Convergentie perkt deze deelverzameling niet verder in maar stelt alleen eisen aan de functie f in het rechterlid van (3.32). We zullen zien dat de Lipschitzcontinuïteit van f voldoende is voor convergentie.

DEFINITIE 3.3. Zij z de lokaal analytische oplossing met beginwaarde (t_n, u_n) die geïntegreerd wordt over (t_n, t_{n+1}) . We noemen nu ρ_n de lokale discretisatiefout waarvoor geldt

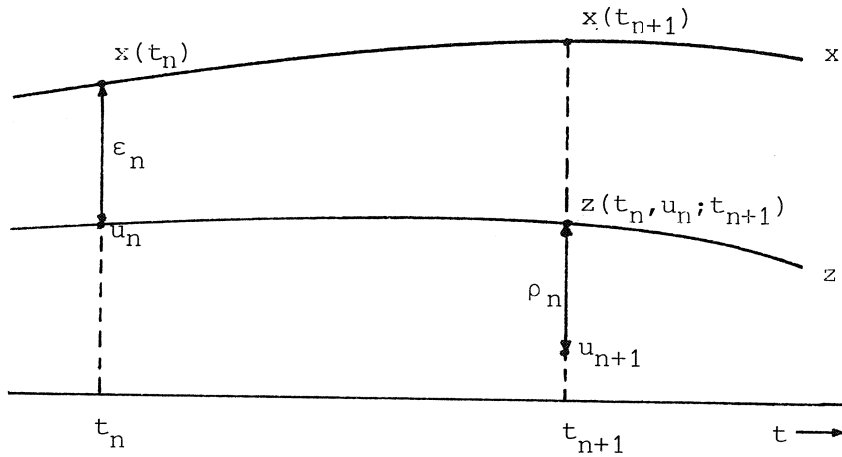
$$\rho_n = z(t_n, u_n; t_{n+1}) - u_{n+1}.$$

Verder noemen we ε_n de globale discretisatiefout

$$\varepsilon_n = x(t_n) - u_n.$$

Wanneer f voldoet aan de Lipschitzcontinuïteit dan voldoet ook E_n aan deze voorwaarde wat eenvoudig in te zien is bij de methode van Euler

$$\begin{aligned}\|E_n(u) - E_n(v)\| &= \|u + hf(u) - v - hf(v)\| \leq \|u - v\| + h\|f(u) + f(v)\| \\ &\leq (1 + hk)\|u - v\|.\end{aligned}$$



Figuur 3.2. De globale discretisatiefout ϵ_n en de lokale discretisatiefout ρ_n .

STELLING 3.1. Stel dat de operator E_n in de omgeving van de analytische oplossing x in $t=t_n$ voldoet aan de Lipschitzcontinuïteit dan voldoet de globale discretisatiefout aan

$$\|\epsilon_{n+1}\| \leq k_n \|\epsilon_n\| + \|x(t_{n+1}) - E_n(x(t_n))\|.$$

BEWIJS.

$$\epsilon_{n+1} = x(t_{n+1}) - u_{n+1} = [E_n(x(t_n)) - E_n(u_n)] + [x(t_{n+1}) - E_n(x(t_n))]$$

enz. $\square$

We kunnen nu een bovengrens voor de globale fout afleiden die alleen afhangt van k en de lokale afbreekfout. Definieer

$$(3.22a) \quad c_1 = \max_v \frac{\|x(t_{v+1}) - E_v(x(t_v))\|}{h_v^{p+1}},$$

$$(3.22b) \quad c_2 = \max_v \frac{h_v^{k-1}}{h}.$$

STELLING 3.2. De globale discretisatiefout ε_{n+1} voldoet aan

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_{n+1}\| &< c_1(t_{n+1}-t_0)h^p, & \text{wanneer } c_2 \leq 0, \text{ en} \\ \|\varepsilon_{n+1}\| &< \frac{c_1}{c_2}(e^{c_2(t_{n+1}-t_0)} - 1)h^p, & \text{wanneer } c_2 > 0. \end{aligned}$$

BEWIJS. Met behulp van stelling 3.1 geldt voor $c_2 \leq 0$ dat

$$\begin{aligned} (3.23) \quad \|\varepsilon_{n+1}\| &\leq \|\varepsilon_n\| + c_1 h_n^{p+1} \leq \|\varepsilon_{n-1}\| + c_1 h_n^{p+1} + c_1 h_{n-1}^{p+1} \leq \\ &\leq \sum_{v=0}^n c_1 h_v^{p+1} \leq c_1 h^p \sum_{v=0}^n h_v = c_1 h^p (t_{n+1} - t_0). \end{aligned}$$

Voor $c_2 > 0$ geldt de volgende ongelijkheid

$$\begin{aligned} (3.24) \quad \|\varepsilon_{n+1}\| &\leq (1+c_2 h_n)\|\varepsilon_n\| + c_1 h_n^{p+1} \leq \dots \\ &\leq c_1 [h_n^{p+1} + h_{n-1}^{p+1}(1+c_2 h_n) + \dots + h_0^{p+1} \prod_{v=1}^n (1+c_2 h_v)] \\ &\leq c_1 h^p [h_n + h_{n-1} e^{c_2 h_n} + \dots + h_0 e^{c_2(h_1 + \dots + h_n)}] \\ &\leq c_1 h^p \int_0^{t_{n+1}-t_0} e^{c_2 t} dt = \frac{c_1}{c_2} h^p (e^{c_2(t_{n+1}-t_0)} - 1). \quad \square \end{aligned}$$

Voor de discretisatiefout weten we nu dat elke eenstapsmethode die consistent is en waarvoor de operator E_n aan de Lipschitzcontinuïteit voldoet convergeert.

3.3. Stabiliteit van het numerieke integratieproces

In een numerieke berekening zal men de exacte oplossing van de differentievergelijking $u = \{u_n\}_{n=0}^N$ niet vinden omdat afbreekfouten het resultaat beïnvloeden. We zullen de gevonden numerieke oplossing $\tilde{u}$ noemen, $\tilde{u} = \{\tilde{u}_n\}_{n=0}^N$. Het verschil tussen u en $\tilde{u}$ heet de numerieke fout en er geldt dat het verschil tussen de analytische oplossing van (3.3) en de numerieke oplossing begrensd wordt door de som van de discretisatiefout en de numerieke fout, dus

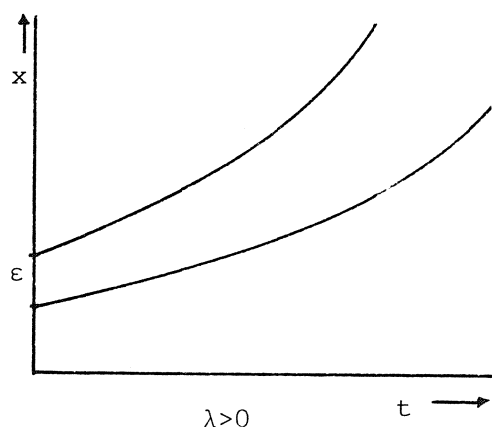
$$(3.25) \quad \|x - \tilde{u}\| \leq \|x - u\| + \|u - \tilde{u}\|.$$

We bespreken hier verder de numerieke fout. Neem aan dat $\tilde{u}$ in het definitiegebied van een of nadere differentieoperator E ligt, dan voldoet $\tilde{u}$ aan $\tilde{E}u = \tilde{p}$, waarin $\tilde{p}$ in feite door $\tilde{u}$ gedefinieerd wordt. Omgekeerd kan men $\tilde{u}$ ook beschouwen als de oplossing van het oorspronkelijke systeem waarin p wordt gestoord. Om te verzekeren dat de numerieke fout klein is eisen we dat het differentieschema min of meer ongevoelig is voor storingen in het rechterlid. Ter illustratie het volgende voorbeeld (zie figuur 3.3).

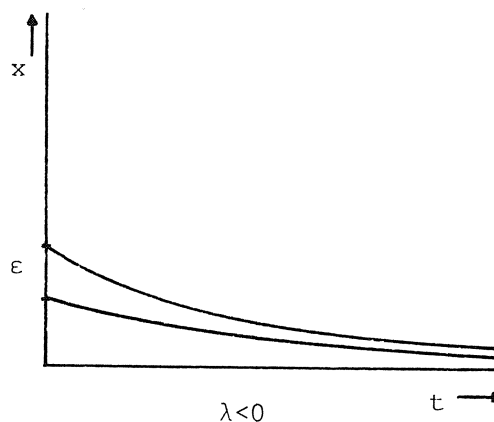
$$\dot{x} = \lambda x,$$

$$x(0) = 1 \text{ levert de oplossing } x(t) = e^{\lambda t}, \text{ en}$$

$$x(0) = 1+\varepsilon \text{ levert de oplossing } x(t) = (1+\varepsilon)e^{\lambda t}.$$



"gevoelig"



"niet gevoelig"

Figuur 3.3.

Laten we $y = y(t_n, u_n; \tau)$ de lokale differentieoplossing noemen en twee van zulke oplossingen beschouwen, namelijk de gestoorde en de ongestoorde respectievelijk $\tilde{y} = y(t_n, \xi + \Delta\xi; \tau)$ en $y = y(t_n, \xi; \tau)$.

Er geldt dan

$$(3.26) \quad y - \tilde{y} = y(t_n, \xi; \tau) - y(t_n, \xi + \Delta\xi; \tau)$$

$$\approx \left[\frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right] \cdot \Delta \xi = E'_n \cdot \Delta \xi$$

waarin E'_n de Jacobiaan van de differentieoperator E_n is. De Jacobiaan van E_n is vaak moeilijk te berekenen. We zullen E'_n daarom benaderen. Uitgangspunt hierbij is de lokale linearisering van de differentiaalvergelijking, dat wil zeggen dat we de rechterlidfunctie f door een eerste orde Taylor-ontwikkeling in het punt ξ benaderen

$$(3.27) \quad \frac{dx}{dt} = J(\xi)x + [f(\xi) - J(\xi) \cdot \xi]; \quad J(\xi) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \xi.$$

Wanneer we nu $v = x - \xi + J^{-1}(\xi)f(\xi)$ stellen dan kan (3.27) herschreven worden tot

$$(3.28) \quad \frac{dv}{dt} = J(\xi)v.$$

Passen we nu op (3.28) een eenstapsmethode toe dan vinden we de volgende relatie

$$(3.29) \quad v_{n+1} = R(h_n J(\xi))v_n,$$

waarin R een polynoom is: $R(z) = 1 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \dots + \beta_n z^n$ voor een m -punts Runge-Kuttamethode. We zullen voor $m = 2$ de afleiding voor een voorbeeld geven (zie ook het voorbeeld in paragraaf 3.1):

$$v_{n+1} = v_n + \lambda_{2,0} h_n J(\xi) v_n + \lambda_{2,1} h_n J(\xi) [v_n + \lambda_{1,0} h_n J(\xi) v_n],$$

$$v_{n+1} = [1 + (\lambda_{2,0} + \lambda_{2,1}) h_n J(\xi) + \lambda_{2,1} \cdot \lambda_{1,0} h_n^2 J(\xi)^2] v_n,$$

waaruit dus volgt dat $R(z) = 1 + (\lambda_{2,0} + \lambda_{2,1})z + \lambda_{2,1} \cdot \lambda_{1,0} z^2$.

Wanneer de Jacobiaan langzaam met zijn argument varieert wordt de operator $E'_n(\xi)$ benadert door $R(h_n J(\xi))$

$$(3.30) \quad E'_n(\xi) \approx R(h_n J(\xi)).$$

De functie R beschrijft bij lineaire differentiaalvergelijkingen exact de stabiliteit van het integratieproces. Voor niet-lineaire differentiaalvergelijkingen beschrijft R lokaal de stabiliteit. Voor sterk variërende Jacobianen moeten we h_n echter wel zeer klein kiezen.

DEFINITIE 3.4. Een eenstapsmethode heet sterk stabiel in ξ wanneer

$$\|E'_n(\xi)\| < 1,$$

zwak stabiel wanneer

$$\|E'_n(\xi)\| \leq 1,$$

en lokaal stabiel wanneer

$$\|R(h_n \cdot J(\xi))\| < 1.$$

DEFINITIE 3.5. De functie R noemen we de stabiliteits-functie van de eenstapsmethode en de verzameling $S = \{z \mid \|R(z)\| < 1\}$ het stabiliteitsgebied.

We zien dus dat een noodzakelijke voorwaarde voor lokale stabiliteit is dat $\|R(z)\| < 1$ voor $z \in h_n \Delta_n$ waarin Δ_n het eigenwaardespectrum van $J(\xi)$ voorstelt.

Het stabiliteitsgebied S hangt uitsluitend af van de integratiemethode, dus van de matrix $\lambda_{j,\ell}$ en niet van de differentiaalvergelijking. Omgekeerd zal men echter voor een gegeven differentiaalvergelijking een integratiemethode wensen waarvan S voor realistische waarden van h_n de waarden $h_n \Delta_n$ nog bevat.

Voor integratiestappen h_n die voldoende klein zijn om de gevraagde nauwkeurigheid te bereiken kan de verzameling $h_n \Delta_n$ toch nog een groot interval van de negatieve as bevatten. Deze eis aan $\lambda_{j,\ell}$ kan wel eens in conflict komen met eerder gestelde eisen aan $\lambda_{j,\ell}$ in verband met de consistentie.

4. PERIODIEKE OPLOSSING MET EEN GEGEVEN PERIODE

4.1. Benadering van dekpunten van de Poincaré-afbeelding

We beschouwen weer de Poincaré-afbeelding

$$(4.1) \quad P: x(0) \rightarrow x(2\pi).$$

Voor de afbeelding P definiëren we de rij functionalen $V_n(x) = \|P^n(x) - x\|$, zoals in (2.40). V_n is positief semidefiniet en is nul in een dekpunt van P^n . Voor de benadering van V_n op een zeker compact gebied gebruiken we de volgende werkwijze.

Zij A_1 een compacte deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ en definieer

$$(4.2) \quad B_i = \{P(x) \mid x \in A_i\}.$$

Wanneer nu geldt dat $A_{i+1} = A_i \cap B_i$ dan kunnen we voor een gegeven gebied A_1 , voor $x \in A_n$, $V_n(x)$ berekenen uit een numerieke benadering van P op A_1 . Deze benadering is gebaseerd op een numerieke integratie van het systeem (3.1) over het interval $(0, 2\pi]$ voor een verzameling beginwaarden x_0 van een rooster R dat A_1 bedekt. Voor $n > 1$ geldt dat $P^i(x) \notin R$ voor $i = 1, \dots, n-1$. We verplaatsen P dan naar het dichtsbijzijnde roosterpunt om $P^{i+1}(x)$ te kunnen berekenen. Hierbij maken we een interpolatiefout. Wanneer nu $\delta \in \mathbb{R}^n$ is met $2\|\delta\|$ kleiner dan de maximale roosterdiagonaal van R dan geldt:

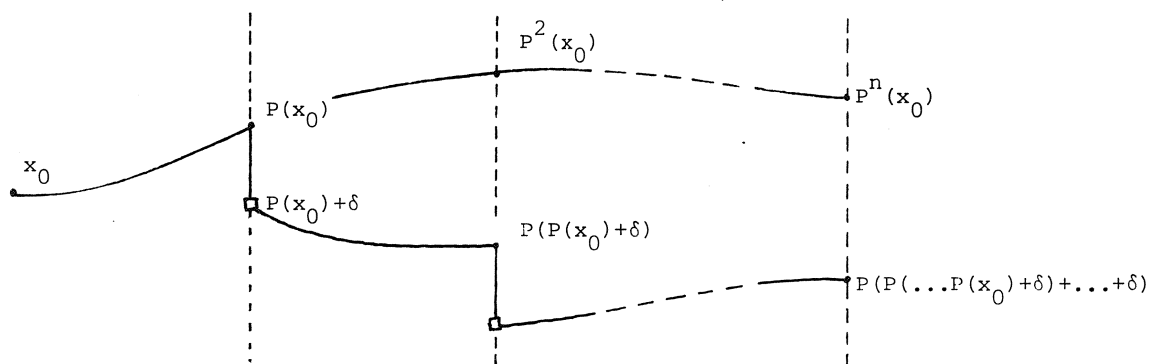
STELLING 4.1. *Zij $x_0 \in R$, dan is de interpolatiefout in $P^n(x_0)$ kleiner dan $\|\delta\| (e^{(n-1)2\pi k} + \dots + 1)$.*

BEWIJS. $\|P(x_0) - (P(x_0) + \delta)\| = \|\delta\|$. Er volgt nu uit stelling 2.4 dat $\|P^2(x_0) - P(P(x_0) + \delta)\| < \|\delta\| e^{2\pi k}$ waaruit we direct afleiden

$$(4.3) \quad \|P^n(x_0) - P(P(\dots P(x_0) + \delta) + \delta) \dots + \delta)\|$$

$$< \|\delta\| (e^{(n-1)2\pi k} + \dots + 1). \quad \square$$

Wanneer we het rooster verfijnen zal dus de interpolatiefout kleiner worden.



Figuur 4.1. De interpolatiefout. ($\square$ is een roosterpunt)

STELLING 4.2. Laat $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ een rij roosters zijn met $\|\delta_n\|$ de lengte van de maximale roosterdiagonaal van R_n zodanig dat $\|\delta_{i+1}\| \leq \frac{1}{2}\|\delta_i\|$. Noem $P^*: R_n \rightarrow R_n$ de geïnterpoleerde Poincaré-afbeelding. Er geldt nu dat de continue voortzetting van P^* op A_1 (zeg $\tilde{P}$) voor $n \rightarrow \infty$ noodzakelijk de afbeelding P is.

BEWIJS. Noem $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = R$, dan ligt R dicht in A_1 want zij $x \in A_1$, $x \notin R$ en $\epsilon > 0$ willekeurig. Er is nu een $v = v(\epsilon)$ met $r \in R_v$ zodanig dat $\|x-r\| < \epsilon$. Kies namelijk $v > p$ met $\|\delta_{p-1}\| \leq \epsilon$. We hebben nu twee continue afbeeldingen $\tilde{P}$ en P met $\tilde{P}, P: A_1 \rightarrow Y$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ is Hausdorff en $P|_R = \tilde{P}|_R$. We laten nu zien dat $P = \tilde{P}$ op A_1 . Stel dat er een $x_0 \in A_1$ is met $P(x_0) \neq \tilde{P}(x_0)$. Daar Y een Hausdorffruimte is kunnen we twee disjuncte open verzamelingen O_1 en O_2 kiezen zodanig dat $P(x_0) \in O_1$ en $\tilde{P}(x_0) \in O_2$. Daar P een continue afbeelding is bestaat er een omgeving U_1 van x_0 met $P(U_1) \subseteq O_1$. Evenzo is er een omgeving U_2 van x_0 met $\tilde{P}(U_2) \subseteq O_2$. R ligt dicht in A_1 dus geldt dat

$$(4.4) \quad U_1 \cap U_2 \cap R \neq \emptyset.$$

Uit $P|_R = \tilde{P}|_R$ volgt echter

$$(4.5a) \quad P(U_1 \cap U_2 \cap R) \subseteq P(U_1) \subseteq O_1$$

$$(4.5b) \quad P(U_1 \cap U_2 \cap R) = \tilde{P}(U_1 \cap U_2 \cap R) \subseteq \tilde{P}(U_2) \subseteq O_2.$$

wat in tegenspraak is met (4.4). Er bestaat dus geen $x_0 \in A_1$ met $P(x_0) \neq \tilde{P}(x_0)$ zodat $P = \tilde{P}$ op A_1 . $\square$

Door het bovenstaande uit te voeren verkrijgen we een globaal beeld van de nulpunten van de functionaal V_n . We kunnen nu dus een zinvolle beginwaarde kiezen die naar een (sub)harmonische oplossing van gekozen orde leidt. Vanuit deze beginwaarde x_0 passen we lokale minimalisatie van V_n toe op de volgende wijze. Zij $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_m > 0$ en $x_0 \in A$, een compacte deelverzameling van $\mathbb{R}^2$. We construeren nu een eindige rij $\{u_j\}_{j=0}^n$ met $u_0 = x_0$. Het element u_{j+1} verkrijgen we uit u_j door vanuit u_j ε_1 -stapjes te maken evenwijdig aan de coördinaatassen. Dit levert ons vier punten u_{j1}, u_{j2}, u_{j3} en u_{j4} waarin we V_n numeriek berekenen. Er is dan een ℓ met

$$(4.6) \quad V_n(u_{j\ell}) = \min\{V_n(u_{j1}), V_n(u_{j2}), V_n(u_{j3}), V_n(u_{j4})\} \quad \ell \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Stel dat $V_n(u_{j\ell}) \leq V_n(u_j)$ dan geldt dat $u_{j+1} = u_{j\ell}$, enz., totdat uiteindelijk $V_n(u_{p\ell}) \geq V_n(u_p)$. We maken dan wat meer ε_1 -stapjes vanuit u_p in de richtingen $(\varepsilon_1 \cos k\alpha, \varepsilon_1 \sin k\alpha)$ waarin $k = 1, \dots, r$ en $\alpha = \frac{2\pi}{r}$. Terminatie is verzekerd door het begrensd zijn van A . We vinden zo een punt u_{p+1} met een afstand kleiner dan ε_1 tot het exacte lokale minimum van V_n . Wanneer nu ε_1 vervangen wordt door ε_2 en de nieuwe beginwaarde u_{p+1} is dan kunnen we het proces herhalen. De fout wordt dan kleiner dan ε_2 , enz., totdat de fout kleiner is dan ε_m .

Kiezen we ε_m klein genoeg en het integratieproces voldoende diep dan dan verkrijgen we uiteindelijk het nulpunt van V_n met hoge nauwkeurigheid. Deze nauwkeurigheid hebben we nodig om de methode van URABE [20] toe te passen waarmee we het bestaan van een exact nulpunt kunnen aantonen (zie sectie 4.2). Eerst zullen we enkele voorbeelden van bovenstaande strategie geven.

VOORBEELD 4.1. We beschouwen het stelsel eerste orde differentiaalvergelijkingen

$$(4.7a) \quad \dot{x} = y$$

$$(4.7b) \quad \dot{y} = -\mu y - x + \sin 2\pi t$$

afgeleid van $\ddot{x} + \dot{x} + x = \sin 2\pi t$ met als oplossing $x = \alpha \cos 2\pi t + \beta \sin 2\pi t$.
Kiezen we $\mu = 0.01$ dan geldt

$$(4.8) \quad \alpha = -4.24370 \cdot 10^{-5}, \quad \beta = -2.59886 \cdot 10^{-2}.$$

Wanneer we nu over $(0,1]$ integreren dan verwachten we het dekpunt van P in het punt $(\alpha; 2\pi\beta) = (-4.24370 \cdot 10^{-5}; -1.63291 \cdot 10^{-1})$. Numerieke minimalisatie levert de volgende tabel waarin $\epsilon_m = 10^{-7}$.

x-waarde	y-waarde	V
5.000000+00	5.000000+00	6.901411+00
4.000000+00	4.000000+00	5.543790+00
3.000000+00	3.000000+00	4.186308+00
2.000000+00	2.000000+00	2.829166+00
1.000000+00	1.000000+00	1.473302+00
0.000000+00	0.000000+00	1.565143-01
0.000000+00	-1.000000-01	6.066442-02
0.000000+00	-2.000000-01	3.518552-02
0.000000+00	-1.900000-01	2.560054-02
0.000000+00	-1.800000-01	1.601557-02
0.000000+00	-1.700000-01	6.430654-03
0.000000+00	-1.600000-01	3.154723-03
0.000000+00	-1.610000-01	2.196338-03
0.000000+00	-1.620000-01	1.238128-03
0.000000+00	-1.630000-01	2.818911-04
0.000000+00	-1.631000-01	1.875421-04
0.000000+00	-1.632000-01	9.620760-05
0.000000+00	-1.633000-01	4.140237-05
-1.000000-05	-1.632900-01	3.097251-05
-2.000000-05	-1.632900-01	2.143143-05
-3.000000-05	-1.632900-01	1.189586-05
-4.000000-05	-1.632900-01	2.431529-06
-4.100000-05	-1.632910-01	1.395326-06
-4.200000-05	-1.632910-01	4.937017-07
-4.292388-05	-1.632906-01	4.745009-07
-4.282388-05	-1.632906-01	3.692829-07
-4.272388-05	-1.632906-01	2.738436-07
-4.262388-05	-1.632906-01	1.784107-07
-4.252388-05	-1.632906-01	8.300583-08
-4.242388-05	-1.632906-01	1.300431-08

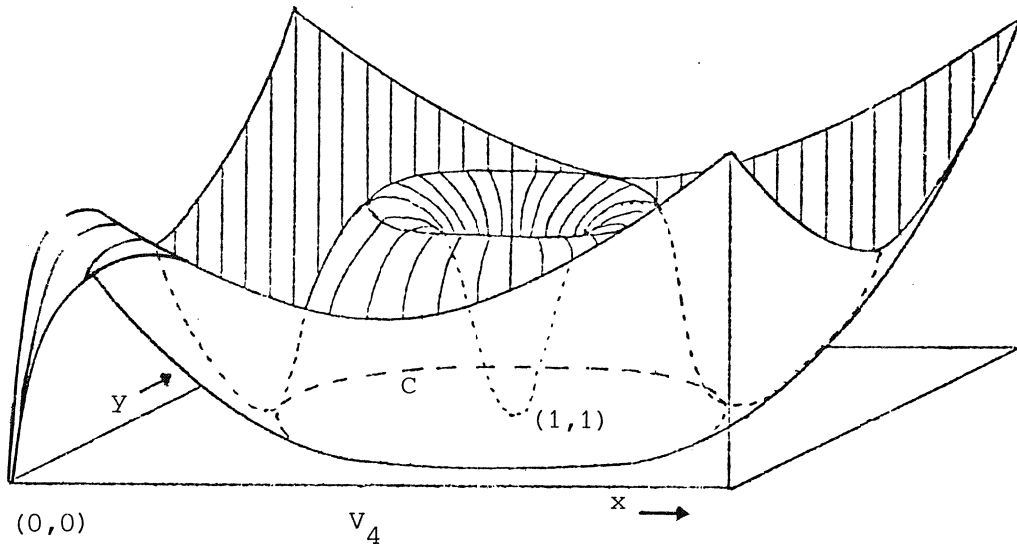
Tabel 4.1. Numerieke minimalisatie van (4.7) vanuit het punt (5.5).

VOORBEELD 4.2. Beschouw de Volterra-Lotka vergelijkingen

$$(4.9a) \quad \dot{x} = \alpha x(1-y),$$

$$(4.9b) \quad \dot{y} = \beta y(x-1).$$

met $\alpha = 3.4$ en $\beta = 0.8$. We zoeken oplossingen met periode vier. Numerieke integratie over $(0,1]$ levert na iteratie V_4 (zie figuur 4.2).



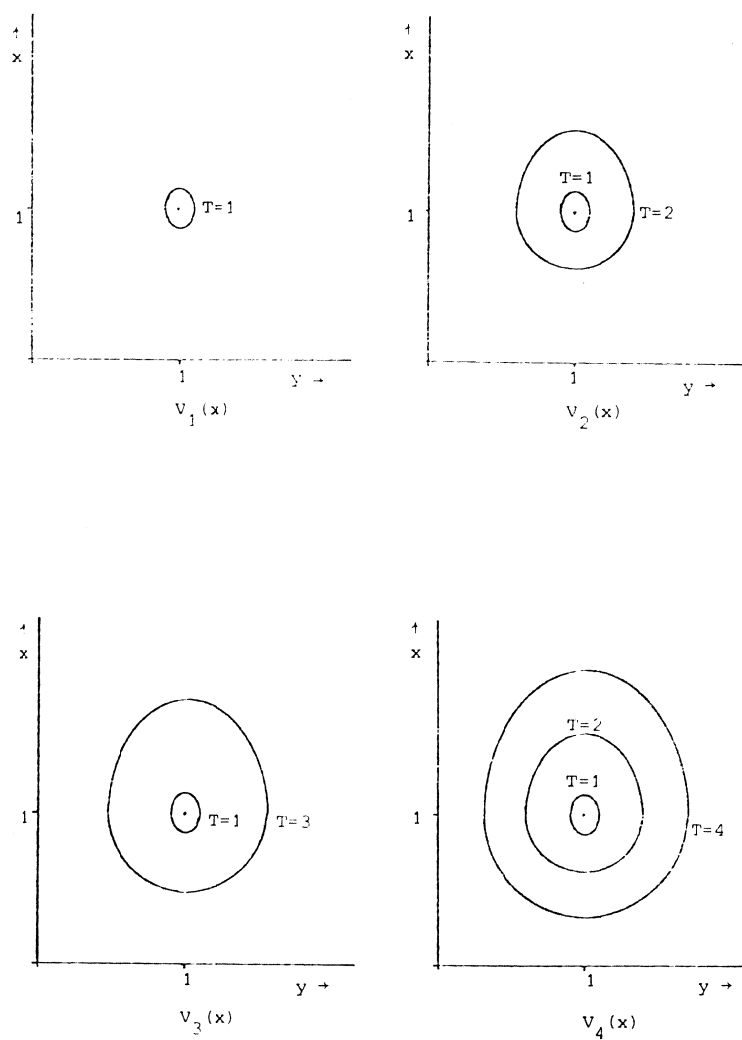
Figuur 4.2. De afbeelding V_4 van een Volterra-Lotka vergelijkingen met $(\alpha, \beta) = (3.4, 0.8)$.

We onderscheiden drie verzamelingen waarop V_4 de waarde nul aanneemt

- (i) het zadelpunt $(0,0)$
- (ii) het werverpunt $(1,1)$
- (iii) de gesloten kromme C .

Blijkbaar correspondeert (iii) met de verzameling beginwaarden die een baan met periode vier doorlopen. Dit voorbeeld werd zodanig gekozen dat cykels met een gehele periode kleiner dan vier niet voorkomen. Nabij het evenwicht $(1,1)$ namelijk hebben de cykels bij benadering een periode $T = 2\pi/\sqrt{\alpha\beta}$, zie LAUWERIER [14]. In voorbeeld 4.2 is $T = 3.81$ de minimale periode.

Algemener kunnen we bij beschouwing van V_n niet concluderen of een verzameling nulpunten correspondeert met een oplossing van periode n of met een oplossing met een periode die een deler van n is. Wanneer we V_n met $V_1, \dots, V_{n-1}$ vergelijken dan kunnen we wel een uitspraak doen wat betreft de periode. (zie figuur 4.3, waarin de gesloten krommen de nulpunten van V_i voorstellen, $i = 1, \dots, 4$, $\alpha = 14.0$ en $\beta = 5.0$).



Figuur 4.3. De nulverzamelingen van de afbeeldingen V_1, V_2, V_3 en V_4 voor de Volterra-Lotka vergelijkingen met $(\alpha, \beta) = (14, 5)$.

4.2. Existentie van geïsoleerde periodieke oplossing

Voor het bewijs van het bestaan van een periodieke oplossing in de omgeving van een benaderde oplossing gebruiken we de methode van Urabe. We beschouwen wederom een stelsel niet-lineaire differentiaalvergelijkingen

$$(4.10a) \quad \dot{x} = f(x, t)$$

$$(4.10b) \quad f(x, t) = f(x, t+2\pi) \quad \text{en} \quad f \in C^k(D \times L), \quad k \geq 1.$$

Propositie 3 van [20] stelt ons nu in staat om numeriek aan te tonen dat er in de omgeving van een 2π -periodieke benadering een geïsoleerde 2π -periodieke oplossing ligt en luidt als volgt:

STELLING 4.3. *Laat $x = \bar{x}(t)$ een 2π -periodieke benadering zijn van (4.10) met $x \in D$. Zij $A(t)$ een continue 2π -periodieke matrix zodanig dat de multiplicatoren van $\dot{y} = A(t)y$ allen ongelijk één zijn. Zij $\phi(t)$ de fundamentealmatrix van $\dot{y} = A(t)y$ met $\phi(0) = E$ (de eenheidsmatrix).*

Definieer

$$(4.11a) \quad H(t, s) = \phi(t) [E - \phi(2\pi)]^{-1} \phi^{-1}(s), \quad 0 \leq s \leq t \leq 2\pi,$$

$$(4.11b) \quad H(t, s) = \phi(t) [E - \phi(2\pi)]^{-1} \phi(2\pi) \phi^{-1}(s), \quad 0 \leq t \leq s \leq 2\pi$$

met $H_{p,q}(t, s)$ de elementen van de matrix $H(t, s)$. Neem aan dat er positieve constanten M en r bestaan zodanig dat

$$(4.12) \quad \max_{0 \leq t \leq 2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{p,q} H_{p,q}^2(t, s) \, ds \leq \frac{M^2}{2\pi}$$

$$(4.13) \quad \max_{0 \leq t \leq 2\pi} \|\dot{\bar{x}}(t) - f(\bar{x}(t), t)\| \leq r.$$

Noem verder nog $\psi(x, t) = f_x(x, t)$.

Wanneer er nu een $\delta > 0$ en $0 < \kappa < 1$ bestaat met

$$(4.14a) \quad D_\delta = \{x \mid \|x - \bar{x}(t)\| \leq \delta \, \forall t \in \mathbb{R}\},$$

$$(4.14b) \quad \|\psi(x,t) - A(t)\| \leq \frac{\kappa}{M}, \quad t \in \mathbb{R}, x \in D_\delta,$$

$$(4.14c) \quad Mr/(1-\kappa) \leq \delta.$$

Dan heeft (4.8) een unieke 2π -periodiek oplossing $x = \bar{x}(t)$ in D_δ en deze oplossing ligt geïsoleerd. Verder geldt dat

$$(4.15) \quad \max_{0 \leq t \leq 2\pi} \|\bar{x}(t) - \hat{x}(t)\| \leq \frac{Mr}{1-\kappa}. \quad \square$$

De methode van Urabe behoeft op de stelsels die wij bekijken enige aanpassing. Het is duidelijk dat in het algemeen deze stelling niet zonder de hulp van de computer kan worden toegepast.

Een bezwaar is tevens dat stelling 4.3 een benadering eist die 2π -periodiek is terwijl de methode uit het begin van dit hoofdstuk een oplossing levert die bijna 2π -periodiek is. Van nut is ons wel de door de geïtereerde Poincaré-afbeelding berekende beginwaarde, welke een benadering van het dekpunt is en waarvan de corresponderende oplossing met de Runge-Kutta methode van het vorige hoofdstuk met voldoende nauwkeurigheid bepaald kan worden. Deze oplossing kan benaderd worden door een afgebroken Fourierreeks, waarvan de coëfficiënten uit een aantal op verschillende tijdstippen geëvalueerde waarden van de oplossing bepaald kan worden, zie [21,p.112]. Deze methode levert een benaderende oplossing met een periode van 2π waarop we nu stelling 4.3 kunnen toepassen. Een en ander zal in het hoofdstuk 5 uitgebreid worden beschreven en vervolgens voor enkele expliciete voorbeelden worden berekend.

5. DE AANGEDREVEN VOLTERRA-VERHULSTVERGELIJKING

5.1. Toepassing van de methode van Urabe

We zoeken subharmonische oplossingen van het stelsel (1.6) in een gegeven compact gebied en passen hierop de methode van Urabe toe.

Aangezien stelling 4.3 een 2π -periodiek systeem vereist dienen we het rover-prooisysteem (1.6) te transformeren tot

$$(5.1a) \quad \frac{dx_1}{dt} = \frac{\alpha T}{2\pi} x_1 (1 + \gamma \cos(tT) - \eta x_1 - x_2),$$

$$(5.1b) \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{\beta T}{2\pi} x_2 (-1 + x_1), \quad T \in \mathbb{N}$$

door de tijdtransformatie $t = \frac{tT}{2\pi}$ uit te voeren. Het is duidelijk dat wanneer (5.1) een 2π -periodieke oplossing heeft dat dan (1.6) een subharmoonische oplossing bezit van orde T . Voor het systeem (5.1) kunnen we de voorwaarden (4.14) van stelling 4.3 verifiëren. Laat eerst de matrix $A(t)$ de Jacobiaan ψ van (5.1) zijn in de 2π -periodieke benadering $\bar{x}(t)$.

$$(5.2) \quad A(t) = \psi(\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), t)$$

Voor voorwaarde (4.14b) verkrijgen we de volgende afchatting

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \|\psi(x_1, x_2, t) - A(t)\|^2 &= \|\psi(x_1, x_2, t) - \psi(\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), t)\|^2 = \\ &= \frac{T^2}{4\pi^2} \{ \alpha^2 (2\eta(x_1 - \bar{x}_1(t)) + x_2 - \bar{x}_2(t))^2 + \\ &\quad (\alpha^2 + \beta^2)(x_1 - \bar{x}_1(t))^2 + \beta^2(x_2 - \bar{x}_2(t))^2 \} \leq \\ &= \frac{T^2}{4\pi^2} \{ \max(2\alpha^2 + \beta^2, \alpha^2 + \beta^2 + 8\eta^2 \alpha^2) \} \{ (x_1 - \bar{x}_1(t))^2 + (x_2 - \bar{x}_2(t))^2 \}. \end{aligned}$$

Wanneer dus geldt dat $(x_1, x_2) \in D_\delta$ met

$$(5.4) \quad D_\delta = \{ (x_1, x_2) \mid (x_1 - \bar{x}_1(t))^2 + (x_2 - \bar{x}_2(t))^2 \leq \delta^2 \}, \quad \delta > 0,$$

dan levert (5.3) met (5.4) de ongelijkheid

$$(5.5) \quad \|\psi(x, t) - \psi(\bar{x}, t)\| \leq \frac{\delta T \sqrt{q}}{2\pi},$$

$$q = \max(2\alpha^2 + \beta^2, \alpha^2 + \beta^2 + 8\eta^2 \alpha^2).$$

Er wordt aan voorwaarde (4.14) voldaan wanneer er een $\delta > 0$ en een κ , $0 < \kappa < 1$, bestaan zodanig dat geldt

$$(5.6) \quad \frac{\delta T \sqrt{q}}{2\pi} \leq \frac{\kappa}{M} \quad \text{en} \quad \frac{Mr}{1-\kappa} \leq \delta.$$

Stel voor het gemak $\frac{Mr}{1-\kappa} = \delta$. Nu gaat (5.6) over in

$$(5.7) \quad \frac{rTM^2\sqrt{q}}{2\pi} \leq \kappa(1-\kappa).$$

Definieer nog $\xi = \frac{rTM^2\sqrt{q}}{2\pi}$ dan wordt aan (4.14) voldaan wanneer

$$(5.8) \quad \xi \leq \frac{1}{4}.$$

We hebben aangetoond dat er in D_δ een unieke geïsoleerde subharmonische oplossing bestaat met periode 2π van (5.1) mits er geldt dat de multiplicatoren van $\dot{y} = A(t)$ y ongelijk één zijn.

Uit (5.7) zien we dat voor gegeven parameters van (5.1) de waarde van rM^2 beslissend is voor het voldoen aan deze ongelijkheid. Aangezien r bepaald wordt door de nauwkeurigheid van de benadering $\bar{x}(t)$ kan een succesvolle toepassing van de methode van Urabe slechts gerealiseerd worden wanneer $\bar{x}(t)$ voldoende nauwkeurig is berekend. Voor een 2π -periodieke benadering van de 2π -periodieke oplossing van (5.1) gebruiken we, zoals voorgesteld, het trigonometrische vectorpolynoom

$$(5.9) \quad \bar{x}(t;m) = a_0 + \sum_{n=1}^m (a_{2n-1} \sin nt + a_{2n} \cos nt).$$

Door (5.9) in te vullen in (5.1) zouden we numeriek de Fouriercoëfficiënten van een periodieke oplossingen kunnen berekenen met de methode van GALERKIN, zie [21, p.108]. Het blijkt echter zo te zijn dat van het stelsel niet-lineaire algebraïsche vergelijkingen voor de coëfficiënten in het bijzonder die oplossingen die corresponderen met een subharmonische oplossing moeilijk te vinden zijn. Het is daarom dat we de in paragraaf 4.2 voorgestelde methode volgen en uitgaan van een voldoende nauwkeurige numerieke oplossing met een beginpunt dat voldoende dicht bij het dekpunt ligt. De coëfficiënten van de Fourierreeks kunnen dan bepaald worden door de numerieke oplossing op een aantal tijdstippen te evalueren.

Om M te kunnen schatten lossen we het beginwaardeprobleem

$$(5.10) \quad \phi' = \psi(\bar{x}(t;m), t)\phi, \quad \phi(0) = E, \quad 0 < t \leq 2\pi$$

numeriek op. We kunnen dan uit (4.11) de matrix $H(t,s)$ bepalen en vervolgens (4.12) oplossen met behulp van de regel Regel van Simpson en de Runge-Kutta-methode.

Als afschatting van r gebruiken we het maximum van de verschilfunctie $\|\bar{x}'(t;m) - f(x(t;m), t)\|$ voor m voldoende groot, dat wil zeggen over een voldoende aantal punten berekend.

Eventuele asymptotische stabiliteit van een periodieke oplossing kunnen we onderzoeken uit (5.10) doordat deze de afgeleide naar t van de exacte oplossing benadert. De multiplicatoren van het lineaire systeem (5.10) zijn de eigenwaarden van $\phi(2\pi)$ welke met de hand kunnen worden berekend.

5.2. Numerieke resultaten

We beperken ons tot de klasse van (5.1) met een kleine Verhulstterm, $0 < \eta \ll 1$. Voor een autonoom systeem, dat wil zeggen $\gamma = 0$, betekent dit dat de oplossingen langzaam uitdempen. Rond het evenwichtspunt $(x_1, x_2) = (1, 1-\eta)$ hebben deze oplossingen een periode van ongeveer $\frac{2\pi}{\sqrt{\alpha\beta}}$. De periode neemt naar buiten toe met de amplitude. Wanneer we nu een voldoende grote aandrijftterm introduceren dan zullen er asymptotisch stabiele oplossingen verschijnen met periode $T = 1, k, k+1, k+2$, waarin k afhangt van de waarde $\alpha\beta$. We berekenen zulke perioden voor de volgende voorbeelden (zie tabel 5.1).

	α	β	γ	η	$2\pi/\sqrt{\alpha\beta}$
Voorbeeld 5.1	4.539	1.068	.25	.0025	2.85
Voorbeeld 5.2	3.4	.8	.25	.0025	3.81

Tabel 5.1. De parameters van twee voorbeelden.

De resultaten van voorbeeld 5.1 en 5.2 staan in tabel 5.2.

In alle gevallen is existentie bewezen met behulp van de methode van Urabe. Ter illustratie hebben we in de Appendix de Fouriercoëfficiënten

van de stabiele oplossingen uit voorbeeld 5.2 opgenomen.

T	$x_1(0)$ $x_2(0)$	Multiplicatoren	M	r	$\xi(<\frac{1}{4})$
1	0.98961058 0.963138653	-0.59+0.80i STABIEL	8.5	$2 \cdot 10^{-9}$	$1.5 \cdot 10^{-7}$
3	0.407008521 1.484111304	0.76+0.62i STABIEL	67	10^{-8}	$1.4 \cdot 10^{-4}$
3	0.40555853 1.05763779	1.51, 0.64 INSTABIEL	54	$6 \cdot 10^{-9}$	$1.8 \cdot 10^{-5}$
4	0.095179161 0.2697495821	-0.37+ 0.90i STABIEL	1245	10^{-8}	$1.6 \cdot 10^{-2}$

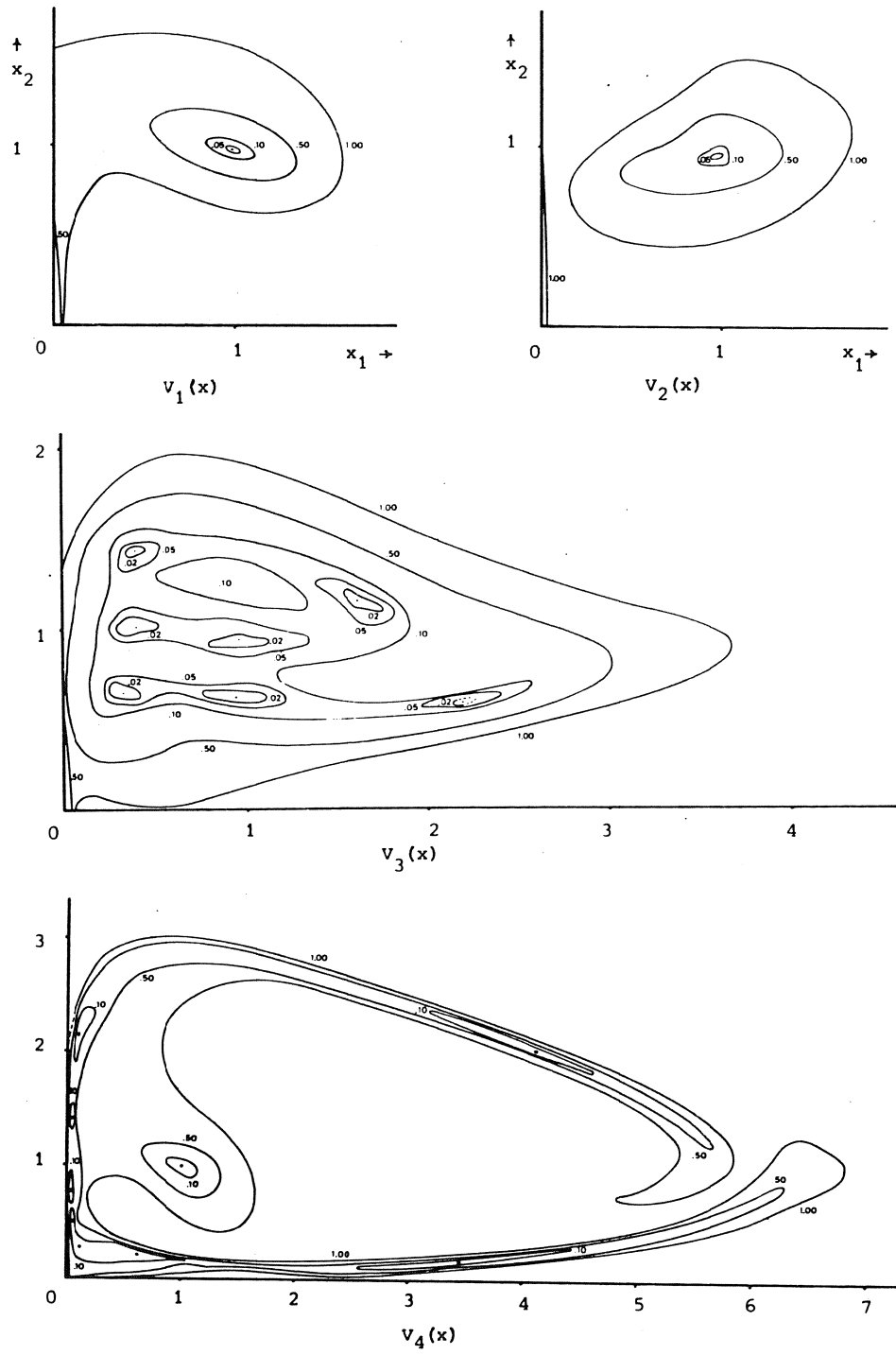
Voorbeeld 5.1

T	$x_1(0)$ $x_2(0)$	Multiplicatoren	M	r	$\xi(<\frac{1}{4})$
1	0.9948671 0.9791929	-0.08+ 0.99i STABIEL	10	10^{-6}	$7.8 \cdot 10^{-5}$
4	0.682447607 1.528681362	0.93+ 0.32i STABIEL	145	10^{-7}	$6.6 \cdot 10^{-3}$
4	0.447779739 1.306031262	1.32, 0.73 INSTABIEL	162	$2 \cdot 10^{-9}$	$1.6 \cdot 10^{-4}$
5	0.0415914697 0.5085066681	0.20+ 0.96i STABIEL	657	$5 \cdot 10^{-9}$	$8.4 \cdot 10^{-3}$

Voorbeeld 5.2

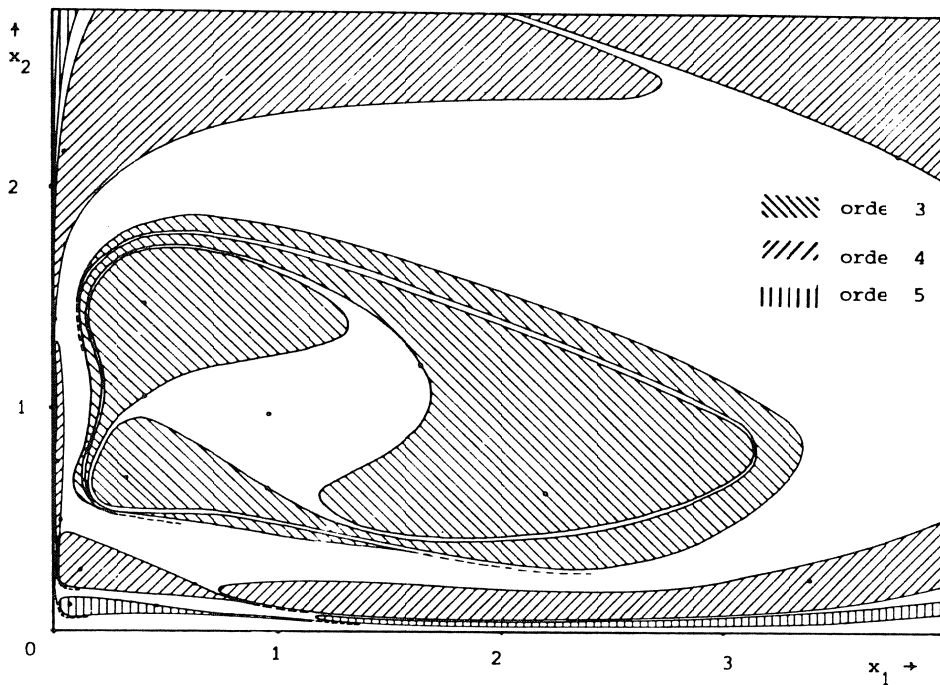
Tabel 5.2. Enkele periodieke oplossingen uit voorbeeld 5.1 en voorbeeld 5.2.

Figuur 5.1. toont de functionaal V_n van voorbeeld 5.1 voor $n = 1, 2, 3, 4$ aan-gegeven door hoogtelijnen. We zien bij V_3 en V_4 duidelijk nieuwe kuiltjes verschijnen die overeenkomen met oplossingen die respectievelijk periode 3 en 4 bezitten.

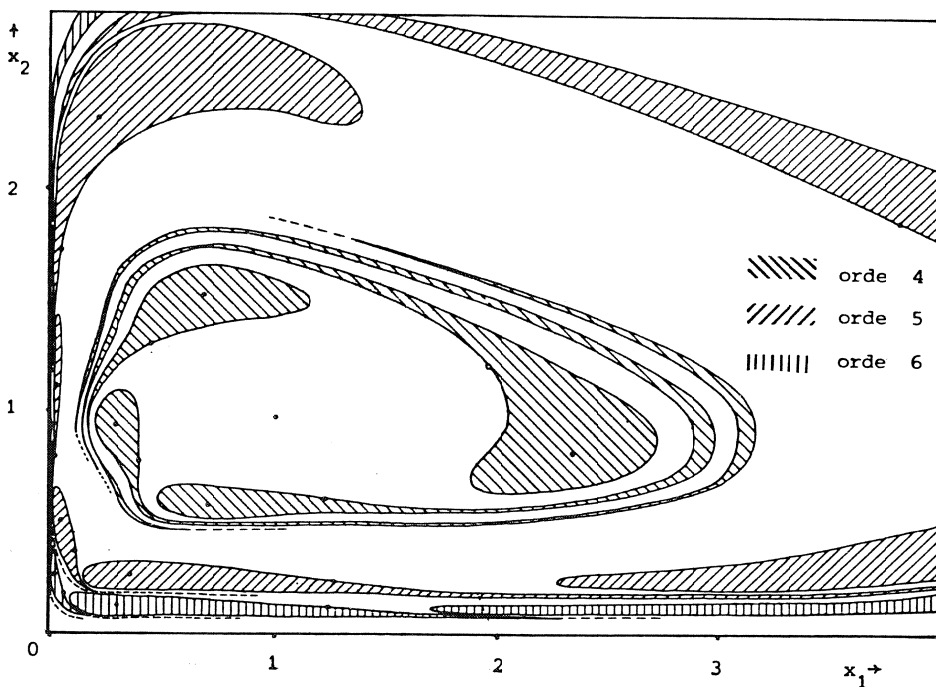


Figuur 5.1.

Wanneer we eenmaal de stabiele en instabiele oplossingen met periode T kennen dan is het eenvoudig het attractiegebied van de stabiele oplossing met periode T te bepalen. We passen de tijdstransformatie $t = -t$ toe en integreren over zeer kleine stapjes vanuit het instabiele zadelpunt. De attractiegebieden tekenen zich dan af. Deze methode is voorgesteld door HAYASHI [8] en hier uitgewerkt voor beide voorbeelden op tijdstip $t = 0$. (zie figuur 5.2)



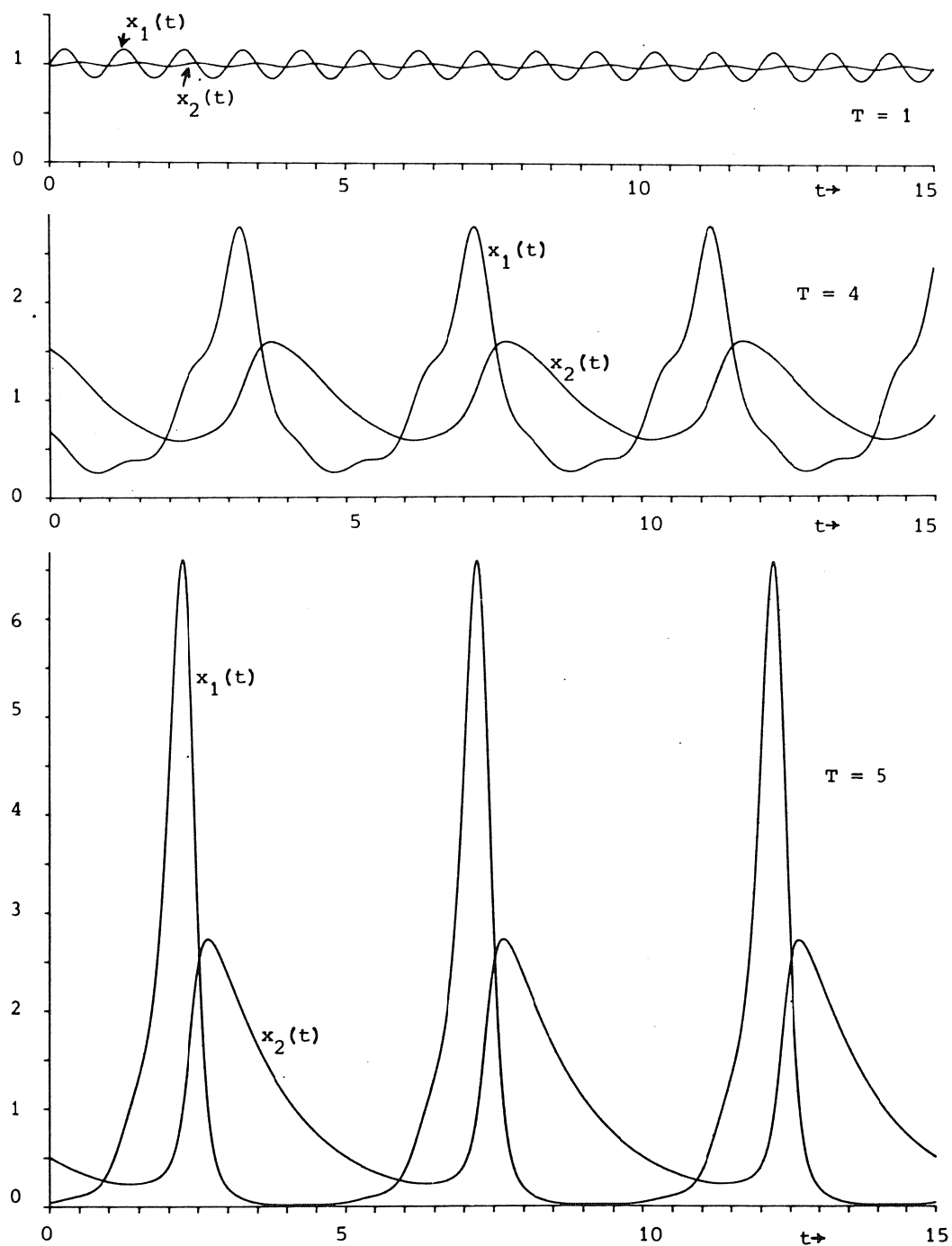
Voorbeeld 1



Voorbeeld 2

Figuur 5.2. De attractiegebieden in het fasevlak op $t = 0$.

Als laatste geven we de asymptotisch stabiele periodieke oplossingen van voorbeeld 5.2 als functie van de tijd in figuur 5.3



Figuur 5.3. Stabiele (sub)harmonische oplossingen van voorbeeld 5.2.

5.3. Periodieke verschijnselen in de populatiedynamica

In het bovenstaande hebben we de existentie bewezen van asymptotisch stabiele subharmonische oplossingen van het aangedreven Volterra-Lotka systeem (1.6). Dit model dient om fluctuaties te beschrijven in de dichtheden van rovers en prooidieren die een vaste periode doorlopen. In de simulatie wordt rekening gehouden met de invloed van de seizoenen op de aanwas van de prooidieren. Het gegeven dat we met het model (1.6) asymptotisch stabiele subharmonische oplossingen verkrijgen met redelijk grote attractiegebieden, afhankelijk van de parameters, ondersteunt het vermoeden dat meerjaarlijkse cycli in rover-prooi systemen een gevolg zijn van seizoensinvloeden. Men kan in plaats van aan rover-prooi systemen ook aan een plant-herbivoor wisselwerking denken. Hieruit kunnen we de 5-jaarlijkse cyclus van de haas verklaren wanneer men bedenkt dat de groei van het gras aan seizoenen gebonden is.

We verwachten dat wanneer we de andere parameters in het systeem periodiek variëren het systeem een kwalitatief gelijk gedrag vertoont. Als we bijvoorbeeld de parameters b en d periodiek in de tijd laten zijn dan kunnen we wellicht dit model gebruiken om het periodiek voorkomen van epidemieën te verklaren. Voor dit probleem kiezen we dan x de dichtheid van de vatbaren en y de dichtheid van de infectieve populatie. Het periodiek zijn van b en d wordt dan veroorzaakt door de seizoensgevoeligheid van de besmettelijkheid. Als voorbeeld noemen we de 2-jaarlijkse cyclus van de mazelen of de 3-jaarlijkse periode waarmee rabies onder vossen uitbreekt.

LITERATUURLIJST

- [1] BLOM, J.G., R. DE BRUIN, J. GRASMAN, J. VERWER, *Forced prey-predator oscillations*, Mathematisch Centrum, Amsterdam. (1980), te verschijnen in J. Math. Biology.
- [2] BOYCE, W.E., & R.C. DIPRIMA, *Elementary differential equations and boundary value problems*, Wiley, New York, (1969).
- [3] BUTCHER, J.C., *On the integration processes of A. Huta*, J. Austr. Math. Soc. 3 p. 202-206 (1963).

- [4] CAPEL, P.H.B., *Niet-lineaire differentievergelijkingen*, Universiteit van Amsterdam, Amsterdam, (1977).
- [5] CODDINGTON, E.A. & N. LEVINSON, *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill, New York, (1955).
- [6] GRASMAN, J. & E.J.M. VELING, *Asymptotic methods for the Volterra-Lotka equations*, Mathematisch Centrum, Amsterdam, (1972).
- [7] HALE, J.K. & J.P. LASALLE, *Differential equations and dynamical systems*, Academic Press, New York, (1967).
- [8] HAYASHI, C., *Nonlinear oscillations in physical systems*, McGraw-Hill, New York, (1964).
- [9] HAYASHI, C., *Forced oscillations in nonlinear systems*, Nippon Publ. Cy. Osaka, (1953).
- [10] HENRICI, P., *Discrete variable methods in ordinary differential equations*, Wiley, New York, (1962).
- [11] HIRSCH, M.W. & S. SMALE, *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic Press, New York, (1974).
- [12] HOUWEN VAN DER, P.J., *Numerieke integratie van differentiaalvergelijkingen*, MC Syllabus 24.1, Amsterdam, (1978).
- [13] KOK, J., *Library of numerical procedures for Pascal-users Numpas*, Mathematisch Centrum, Amsterdam, (1978).
- [14] LAUWERIER, H.A., *Biomathematica*, Universiteit van Amsterdam, Amsterdam, (1977).
- [15] LEFSCHETZ, F., *Introduction to topology*, University Press, Princeton, (1949).
- [16] PAVLADIS, T., *Biological oscillations: their mathematical analysis*, Academic Press, New York, (1973).
- [17] PFLUGER, P., *Syllabus van het College numerieke wiskunde*, Universiteit van Amsterdam, Amsterdam, (1978).
- [18] TAKENS, F., *Introduction to Global analysis*, Rijksuniversiteit Utrecht, Utrecht, (1973).

- [19] THOULOZE-PRATT, E., *Théorèmes numériques d'existence de solutions périodiques et presque périodiques d'equations différentielles autonomes et périodiques*, Université de Provence, A. en Provence, (1979).
- [20] URABE, M., *Galerkin's procedure for nonlinear periodic systems*, Arch. Rat. Mech. and Anal. 20. p. 120-152, (1965).
- [21] URABE, M. & A. REITER, *Numerical computation of non-linear forced oscillations by Galerkin's method*, J. Math. Anal. and Appl. 14. p. 107-140, (1966).
- [22] VAART, VAN DER, H.R., *A comparative investigation of certain difference equations and related differential equations: implications for model-building*, B. of Math. Biol. 35. p. 195-211, (1973).

APPENDIX

Fouriercoëfficiënten van enkele stabiele oplossingen

In tabellen A.1, A.2 en A.3 worden de Fourier-coëfficiënten gegeven van de periodieke benadering

$$(A.1) \quad x(t;m) = a_0 + \sum_{n=1}^m (a_{2n-1} \sin nt + a_{2n} \cos nt)$$

van de stabiele oplossingen met beginwaarden, respectievelijk periode

$$(i) \quad (0.9948671, 0.9791929), \quad T = 1$$

$$(ii) \quad (0.682447607, 1.528681362), \quad T = 4$$

$$(iii) \quad (0.0415914697, 0.508506681), \quad T = 5$$

voor het stelsel van paragraaf 5.2 (voorbeeld 5.2)

$$(A.2a) \quad \frac{dx_1}{dt} = \frac{3.4T}{2\pi} x_1 (1 + 0.25 \cos(tT) - 0.0025x_1 - x_2),$$

$$(A.2b) \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{0.8T}{2\pi} x_2 (-1 + x_1).$$

x_1		x_2		
n	a_{2n-1}	a_{2n}	a_{2n-1}	a_{2n}
0		+0.9999999747		+0.9974999744
1	+0.1448617829	+0.0002101385	+0.0000298262	-0.0183974880
2	-0.0000040936	-0.0053469538	-0.0003397902	+0.0000850384
3	-0.0001347998	+0.0000013538	+0.0000031910	+0.0000054484
4	+0.0000000783	+0.0000026325	+0.0000000702	-0.0000000834
5	+0.0000000373	-0.0000000030	-0.0000000005	-0.0000000004
6	-0.0000000047	-0.0000000004	+0.0000000011	+0.0000000001
7	-0.0000000040	+0.0000000002	+0.0000000009	+0.0000000001
8	-0.0000000035	+0.0000000001	+0.0000000008	+0.0000000001
9	-0.0000000031	+0.0000000001	+0.0000000007	+0.0000000000
10	-0.0000000028	+0.0000000001	+0.0000000006	+0.0000000000
11	-0.0000000025	+0.0000000001	+0.0000000006	+0.0000000000
12	-0.0000000023	+0.0000000001	+0.0000000005	+0.0000000000
13	-0.0000000021	+0.0000000000	+0.0000000005	+0.0000000000
14	-0.0000000020	+0.0000000000	+0.0000000005	+0.0000000000
15	-0.0000000018	+0.0000000000	+0.0000000004	+0.0000000000
16	-0.0000000017	+0.0000000000	+0.0000000004	+0.0000000000
17	-0.0000000016	+0.0000000000	+0.0000000004	+0.0000000000
18	-0.0000000015	+0.0000000000	+0.0000000004	+0.0000000000
19	-0.0000000015	+0.0000000000	+0.0000000003	+0.0000000000
20	-0.0000000014	+0.0000000000	+0.0000000003	+0.0000000000

Tabel A.1. De Fouriercoëfficiënten van (A.1) voor (i)

n	x_1		x_2	
	a_{2n-1}	a_{2n}	a_{2n-1}	a_{2n}
0		+1.0000000013		+0.9974999999
1	-0.9622451387	+0.0648068571	+0.0095640998	+0.4816134597
2	-0.1382236910	-0.3267576078	-0.0820805143	+0.0873176896
3	+0.0860200168	-0.1498412609	-0.0430402031	-0.0066217273
4	+0.1809681823	+0.0112709073	-0.0061555672	-0.0262776376
5	+0.0089454017	+0.0840000764	+0.0079348482	-0.0076593573
6	-0.0278086520	+0.0139154438	+0.0041802305	+0.0008520375
7	-0.0109893594	-0.0067524936	+0.0006328634	+0.0016383253
8	+0.0005247687	-0.0090149485	-0.0006352024	+0.0006132591
9	+0.0039392432	-0.0008234438	-0.0003738373	-0.0001070821
10	+0.0008671839	+0.0012333857	-0.0000473836	-0.0001588930
11	-0.0002507126	+0.0005518696	+0.0000470499	-0.0000534281
12	-0.0003339418	+0.0000163308	+0.0000313112	+0.0000082777
13	-0.0000556142	-0.0001314873	+0.0000036618	+0.0000139547
14	+0.0000358325	-0.0000416749	-0.0000044443	+0.0000045214
15	+0.0000219168	+0.0000039368	-0.0000026969	-0.0000006515
16	+0.0000030579	+0.0000102062	-0.0000003190	-0.0000011863
17	-0.0000003390	+0.0000029232	+0.0000003896	-0.0000003803
18	-0.0000016687	-0.0000006033	+0.0000002307	+0.0000000657
19	-0.0000001390	-0.0000007232	+0.0000000258	+0.0000001023
20	+0.0000002556	-0.0000002040	-0.0000000338	+0.0000000320
21	+0.0000001251	+0.0000000547	-0.0000000196	-0.0000000061
22	+0.0000000064	+0.0000000565	-0.0000000020	-0.0000000088
23	-0.0000000193	+0.0000000146	+0.0000000029	-0.0000000026
24	-0.0000000096	-0.0000000043	+0.0000000016	+0.0000000006
25	-0.0000000004	-0.0000000044	+0.0000000001	+0.0000000008

Tabel A.2. De Fouriercoëfficiënten van (A.1) voor (ii)

x_1		x_2		
n	a_{2n-1}	a_{2n}	a_{2n-1}	a_{2n}
0		+1.0000000000		+0.9975000000
1	+0.8557667394	-1.4747725092	-0.7084896502	-0.6684258394
2	-0.9829575333	+0.7320035154	+0.3659884051	+0.2783880116
3	+0.7920555005	-0.2888684883	-0.1954669700	-0.1627304226
4	-0.5984707461	+0.0748893842	+0.1075039265	+0.1091530828
5	+0.4500494676	+0.0586973383	-0.0579822019	-0.0770993897
6	-0.2905276190	-0.1344105054	+0.0297901729	+0.0535638932
7	+0.1606275376	+0.1371204357	-0.0143476210	-0.0366980418
8	-0.0812220181	-0.1099997832	+0.0059788991	+0.0248496676
9	+0.0376562334	+0.0811879192	-0.0015925323	-0.0165968445
10	-0.0134889911	-0.0577956087	-0.0005361782	+0.0108928973
11	+0.0007376929	+0.0386256007	+0.0013785951	-0.0070098387
12	+0.0042817751	-0.0244044178	-0.0015623386	+0.0044217752
13	-0.0054445710	+0.0149437552	+0.0014395731	-0.0027255876
14	+0.0050813601	-0.0089328372	-0.0011995237	+0.0016343734
15	-0.0042143545	+0.0051633279	+0.0009390786	-0.0009469829
16	+0.0032367022	-0.0028495702	-0.0007033557	+0.0005248745
17	-0.0023613254	+0.0014916222	+0.0005091187	-0.0002729433
18	+0.0016659456	-0.0007206499	-0.0003581732	+0.0001277978
19	-0.0011450821	+0.0002973584	+0.0002457209	-0.0000480144
20	+0.0007683542	-0.0000770282	-0.0001646812	+0.0000070706
21	-0.0005037213	-0.0000269518	+0.0001078958	+0.0000116347
22	+0.0003229642	+0.0000675451	-0.0000690824	-0.0000182284
23	-0.0002023091	-0.0000758700	+0.0000431621	+0.0000186959
24	+0.0001234733	+0.0000693143	-0.0000262411	-0.0000164415
25	-0.0000730926	-0.0000572403	+0.0000154486	+0.0000133009
26	+0.0000416684	+0.0000444046	-0.0000087341	-0.0000101883
27	-0.0000225862	-0.0000329594	+0.0000046722	+0.0000074970
28	+0.0000113564	+0.0000236383	-0.0000022954	-0.0000053425
29	-0.0000050038	-0.0000164728	+0.0000009624	+0.0000037044
30	+0.0000015989	+0.0000111902	-0.0000002577	-0.0000025059
31	-0.0000000823	-0.0000074226	-0.0000000817	+0.0000016560
32	+0.0000007964	+0.0000048098	+0.0000002180	-0.0000010692
33	-0.0000009986	-0.0000030426	-0.0000002483	+0.0000006739
34	+0.0000009530	+0.0000018753	+0.0000002287	-0.0000004136
35	-0.0000008065	-0.0000011222	-0.0000001900	+0.0000002463
36	+0.0000006361	+0.0000006479	+0.0000001481	-0.0000001412
37	-0.0000004779	-0.0000003570	-0.0000001104	+0.0000000771
38	+0.0000003461	+0.0000001840	+0.0000000795	-0.0000000391
39	-0.0000002432	-0.0000000848	-0.0000000556	+0.0000000175
40	+0.0000001665	+0.0000000307	+0.0000000379	-0.0000000058
41	-0.0000001112	-0.0000000033	-0.00000000252	+0.0000000000
42	+0.0000000726	+0.0000000090	+0.0000000164	+0.0000000025
43	-0.0000000462	-0.0000000131	-0.0000000104	-0.0000000033
44	+0.0000000287	+0.0000000132	+0.0000000065	+0.0000000032
45	-0.0000000173	-0.0000000114	-0.0000000039	-0.0000000027
46	+0.0000000101	+0.0000000092	+0.0000000023	+0.0000000021
47	-0.0000000057	-0.0000000070	-0.0000000013	-0.0000000016
48	+0.0000000030	+0.0000000051	+0.0000000007	+0.0000000012
49	-0.0000000014	-0.0000000036	-0.0000000003	-0.0000000008
50	+0.0000000006	+0.0000000025	+0.0000000001	+0.0000000006
51	-0.0000000001	-0.0000000017	-0.0000000000	-0.0000000004
52	+0.0000000001	+0.0000000011	+0.0000000000	+0.0000000003
53	-0.0000000002	-0.0000000007	-0.0000000000	-0.0000000002
54	+0.0000000002	+0.0000000004	+0.0000000000	+0.0000000001
55	-0.0000000002	-0.0000000003	-0.0000000000	-0.0000000001

Tabel A.3. De Fouriercoëfficiënten van (A.1) voor (iii)

ONTVANGEN 2 8 AUG. 1980